9. F.d.T. con uno ZERO NELL'ORIGINE: Derivatore invertente ideale.

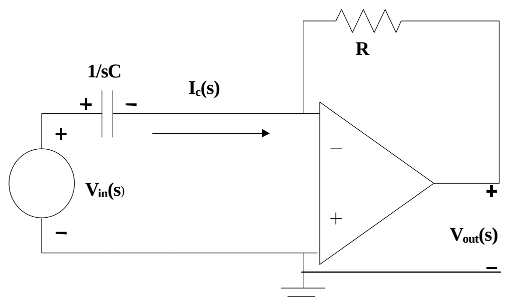

Figura n. 38

9.1 Analisi nel dominio delle Trasformate di Laplace.

Il circuito in esame (**Figura n. 38**) è costituito da un Amplificatore Operazione nella configurazione invertente. La Funzione di Trasferimento del circuito è:

$$\boxed{\overline{F(s)} = -R \bigg/ \left(\frac{1}{sC}\right) = -sRC} \quad \text{eq. 9.1.1}$$

Tale funzione presenta uno ZERO NELL'ORIGINE, giacché il valore s=0 annulla il numeratore della F.d.T.

9.2 Ricerca della F.d.T. direttamente dalla rete.

A prima vista saremmo portati a dire che il circuito presenti un polo perché è presente un elemento reattivo. In realtà occorre verificare se il valore di s che manda ad infinito l'uscita, e quindi anche la F.d.T., è finito.
Dall'analisi del circuito in questione vediamo che la tensione d'uscita tende ad infinito quando il Condensatore posto in serie all'ingresso si comporta come un cortocircuito, quindi per $s \to \infty$. Quindi, non esistendo valori finiti di s che mandino ad infinito la F.d.T., il nostro circuito non ha poli.
Abbiamo gia affermato che per $s \to \infty$ la tensione d'uscita e quindi anche la F.d.T. tende ad infinito. Di conseguenza il numero degli zeri è superiore al numero dei poli.
Il valore dello zero è dato dal valore della s che manda a zero la tensione d'uscita, e quindi anche la F.d.T.. La continua, cioè s=0, manda ad infinito la reattanza del Condensatore in serie all'ingresso e quindi annulla la corrente nel circuito e conseguentemente la tensione d'uscita. Quindi il circuito presenta uno zero nell'origine.
A questo punto sappiamo dall'analisi della rete che la F.d.T. è del tipo:

$$\overline{F(s)} = Ks \qquad \text{eq. 9.2.1}$$

rimane da calcolare il K. Anche in questo caso tale costante non può essere calcolata né per $s \to \infty$, né per s=0, poiché in entrambi i casi il valore della F.d.T. è determinato direttamente dalla variabile s. Quindi per trovare il K è necessario imporre un particolare valore a s, per esempio -1/RC, ed eguagliare il valore della F.d.T. che si ricava dalla (9.2.1) con il valore che si ricava direttamente dalla rete.
Per s=-1/RC la (9.2.1) ci dice che:

$$\overline{F(-1/RC)} = -K\frac{1}{RC} = -\frac{K}{RC} \qquad \text{eq. 9.2.2}$$

Dalla rete, per s=-1/RC, l'impedenza del Condensatore diviene uguale a -R e, di conseguenza, l'Amplificazione che coincide con la F.d.T. assume il valore 1. Imponendo che il valore della F.d.T. trovato nella (9.2.2) sia uguale a quello trovato dalla rete, si ha:

$$-\frac{K}{RC} = 1 \Rightarrow K = -RC \qquad \text{eq. 9.2.3}$$

Sostituendo tale valore del K nella (9.2.1) si ricava:

$$\boxed{\overline{F(s)} = Ks = -sRC} \qquad \text{eq. 9.2.4}$$

che coincide con l'espressione della F.d.T. trovata per via analitica al paragrafo 9.1.

9.3 Risposta del circuito al segnale sinusoidale - DIAGRAMMI DI BODE.

Sostituendo nella F.d.T. alla variabile s il termine jω troviamo la ***risposta del circuito al segnale sinusoidale***. Abbiamo:

$$\overline{F(jw)} = -jwRC \qquad \text{eq. 9.3.1}$$

Il **modulo** di tale funzione complessa vale:

$$\left|\overline{F(jw)}\right| = wRC \qquad \text{eq. 9.3.2}$$

In scala logaritmica abbiamo:

$$\boxed{\mathrm{Log}\left|\overline{F(jw)}\right| = \mathrm{Log}wRC = \mathrm{Log}w - \mathrm{Log}\frac{1}{RC}} \qquad \text{eq. 9.3.3}$$

Quest'ultima funzione nel piano $\mathrm{Log}\left|\overline{F(jw)}\right| \Big/ \mathrm{Log}w$ è l'equazione di una retta di coefficiente angolare +1, quindi parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrate.

Tale retta incontra l'asse delle ordinate (d equazione Logω=0) per $\left|\overline{F(jw)}\right| = RC$

Incontra invece l'asse delle ascisse (d equazione $\mathrm{Log}\left|\overline{F(j\omega)}\right| = 0$ **) per** ω=(1/RC).

Troviamo ora l'andamento della Fase in funzione della frequenza:

$$\boxed{\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} = \mathrm{arctg}\left[\frac{-\omega RC}{0}\right] = \mathrm{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}}$$ *eq. 9.3.4*

LO SFASAMENTO RISULTA ESSERE -π/2, CIOÈ -90°, TEORICAMENTE PER TUTTE LE FREQUENZE DALLA CONTINUA A FREQUENZA INFINITA.

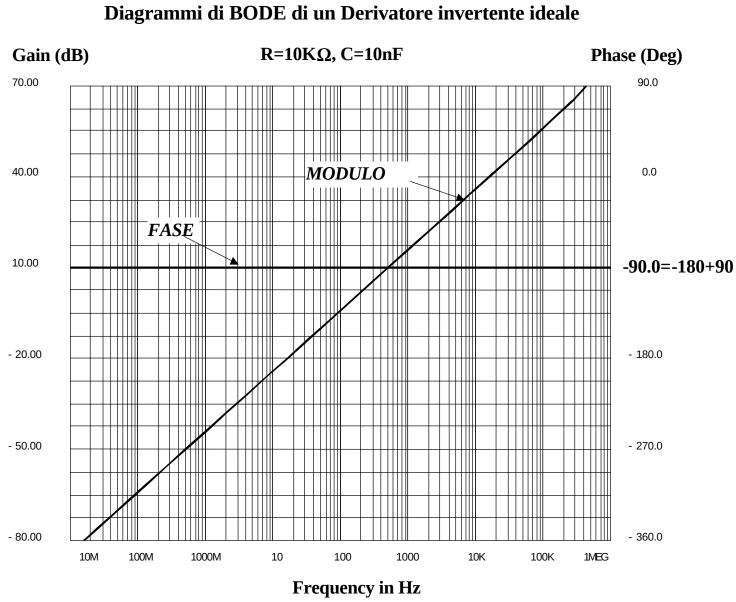

Figura n. 39

Occorre sottolineare che il nostro è un circuito **invertente** e quindi, se si vuole ricavare il contributo in Fase **del solo zero nell'origine,** occorre aggiungere (o togliere) allo sfasamento trovato i 180° legati al segno -. Quindi:

IL CONTRIBUTO IN FASE DI UNO ZERO NELL'ORIGINE È DI -270°, (CHE EQUIVALE A +90°) SU TUTTO IL CAMPO DELLE FREQUENZE.

La simulazione a Calcolatore del circuito in esame, con **R=100KΩ e di C=10nF**, fornisce i Diagrammi di Bode riportati in **Figura n.39**. Essi risultano in accordo con quanto trovato per via teorica.

9.4 Risposta del circuito nel dominio del tempo ad un segnale qualsiasi.

Ricaviamo ora il legame nel **DOMINIO DEL TEMPO** tra la tensione d'uscita e quella d'ingresso.
A partire dalla F.d.T. trovata nelle (9.1.1)e (9.2.4) ed applicando uno dei teoremi fondamentali delle Trasformate di Laplace, quello della Derivata si ha:

$$\boxed{V_{out}(s) = -sRCV_{in}(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[V_{out}(s)] = -RC\mathcal{L}^{-1}[sV_{in}(s)] \Rightarrow v_{out}(t) = -RC\frac{dv_{in}(t)}{dt}}$$ *eq. 9.4.1*

Alla stessa relazione nel tempo arriviamo analizzando il circuito in **Figura n.40**.

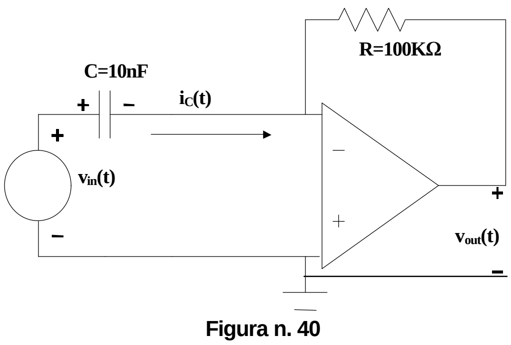

Figura n. 40

Essendo idealmente infinita la Resistenza d'ingresso dell'Amplificatore Operazionale, la corrente che circola in C è uguale a quella che circola in R. Dall'equazione della maglia d'ingresso, chiusa sulla massa virtuale, ricaviamo:

$$v_{in}(t) = v_C(t)$$ *eq. 9.4.2*

Dalla maglia d'uscita, anch'essa chiusa sulla massa virtuale, ricaviamo:

$$v_{out}(t) = -Ri_C(t) = -RC\frac{dv_C(t)}{dt} = -RC\frac{dv_{in}(t)}{dt}$$ *eq. 9.4.3*

e quindi, in conclusione:

$$\boxed{v_{out}(t) = -RC\frac{dv_{in}(t)}{dt}}$$ *eq. 9.4.4*

La tensione d'uscita è direttamente proporzionale alla derivata della tensione d'ingresso. Il circuito si comporta come un DERIVATORE INVERTENTE dalla continua fino, teoricamente, a frequenza infinita.

Questo circuito presenta dei problemi di funzionamento rispetto alle componenti in alta frequenza dei segnali. In particolare si noti che il Condensatore posto in ingresso ha un terminale a massa virtuale; una variazione brusca della tensione d'ingresso è applicata direttamente ai capi del Condensatore che reagisce comportandosi istantaneamente come un cortocircuito, se inizialmente scarico.

ESERCIZIO: Progettare un Derivatore invertente ideale tale che, se poniamo in ingresso un segnale triangolare 0/5V di frequenza 5KHz, otteniamo in uscita un'onda quadra 5/-5.

SVOLGIMENTO

Poiché sappiamo che:

$$v_{out}(t) = -RC\frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

ed inoltre sappiamo che la derivata di una funzione calcolata in un suo punto non è altro che il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in quel punto, possiamo evitare di trovare l'equazione del segnale d'ingresso per poi farne la derivata. Infatti essendo il segnale d'ingresso rettilineo a tratti e sapendo che la derivata di una retta coincide con il suo coefficiente angolare, basterà semplicemente trovare il coefficiente angolare del tratto crescente del segnale d'ingresso.
Otteniamo:

$$m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{5V}{100msec} = 50\ KV/sec$$

Di conseguenza abbiamo che:

$$v_{out}(t) = -5V = -RC\frac{dv_{in}(t)}{dt} = -RCm = -RC50 * 10^3 \Rightarrow RC = \frac{5}{50K} = 100msec$$

quindi ponendo C=10nF occorre prendere una R=10KΩ.
Notiamo che il segnale d'ingresso è a valor medio non nullo ma non occorre dare alcun peso a ciò giacché il circuito in questione deriva anche la componente continua del segnale d'ingresso, annullandola.

ESERCIZIO: Sia dato un Derivatore invertente ideale con R=1KΩ e C=47nF, al quale Poniamo in ingresso la forma d'onda in Figura n. 41 Trovare la forma d'onda in uscita.

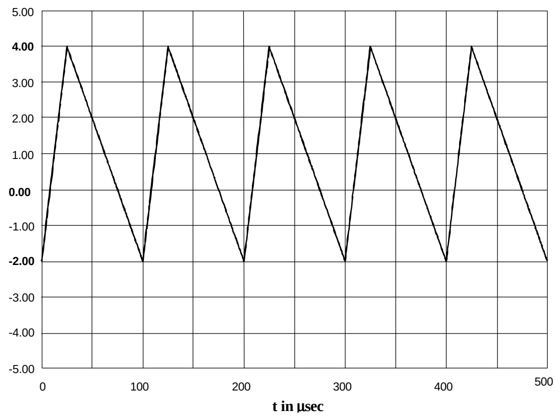

Figura n. 41

SVOLGIMENTO

Troviamo per prima cosa il coefficiente angolare del tratto crescente del segnale d'ingresso. Abbiamo:

$$m' = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{6V}{25msec} = 240\ KV/sec$$

Ora è possibile trovare l'equazione dell'uscita in corrispondenza del tratto crescente del segnale d'ingresso:

$$v'_{out}(t) = -RC\frac{dv_{in}(t)}{dt} = -RCm = -RC * 240 * 10^3 = -11.28V$$

Troviamo ora il coefficiente angolare del tratto decrescente del segnale d'ingresso. Abbiamo:

$$m'' = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{-6V}{75msec} = -80\ KV/sec$$

Ora è possibile trovare l'equazione dell'uscita in corrispondenza del tratto decrescente del segnale d'ingresso:

$$v''_{out}(t) = -RC\frac{dv_{in}(t)}{dt} = -RCm'' = -RC\left(-80 \cdot 10^3\right) = 3.76V$$

Quindi in uscita abbiamo un'onda quadra 3.76/-11.28V e D.C. 25%.

9.5 Contributo di uno zero nell'origine.

Quanto ricavato per il particolare circuito in esame (il Derivatore invertente ideale) ha una valenza generale nel senso che qualsiasi circuito, anche che abbia più poli (tutti non nulli) e più zeri, che abbia comunque un solo zero nell'origine si comporta, **almeno fino ad una decade prima del primo polo o del primo zero non nullo**, come il Derivatore invertente ideale, a parte il segno meno (-).
Quindi un circuito che abbia una F.d.T. con uno **ZERO NELL'ORIGINE,** cioè del tipo:

$$\boxed{F(s) = sG(s)} \quad \textit{eq. 9.5.1}$$

con G(s) che abbia un numero qualsiasi di poli e zeri **NON NULLI**, nel campo di frequenze dette, cioè **FINO AD UNA DECADE PRIMA DELLA FREQUENZA DEL PRIMO POLO O DEL PRIMO ZERO DELLA G(S)**:

⇒ *HA UN DIAGRAMMA DI BODE DEL **MODULO** DEL GUADAGNO CHE **SALE**, A PARTIRE DALLA CONTINUA, CON UNA PENDENZA DI +**20DB** PER DECADE (CIRCA +6DB PER OTTAVA);*

⇒ *HA, A PARTIRE DALLA CONTINUA, UN DIAGRAMMA DI BODE DELLA **FASE** COSTANTE ED UGUALE A **+90°;***

⇒ ***DERIVA** QUALSIASI SEGNALE POSTO IN INGRESSO CHE ABBIA UNA FREQUENZA COMPRESA NEL DETTO CAMPO DI FREQUENZE;*

⇒ *DERIVANDO ANCHE L'EVENTUALE COMPONENTE CONTINUA DEL SEGNALE POSTO IN INGRESSO, ANNULLA TALE COMPONENTE E QUINDI **ALL'USCITA** DEL CIRCUITO AVREMO SEMPRE UN **SEGNALE A VALOR MEDIO NULLO**.*