ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE STATALE «G. Marconi»
PONTEDERA (PI)
☎ 0587 53566/55390 - Fax: 0587 57411 - 🖃 marconi@rcnet.net

ANNO SCOLASTICO 1999/2000

APPUNTI D'ELETTRONICA

(Prof. Pierluigi D'Amico)

Integratori e Derivatori attivi: F.d.T., diagrammi di Bode, risposte nel dominio del tempo

8. F.d.T. con un POLO NELL'ORIGINE: Integratore invertente ideale.

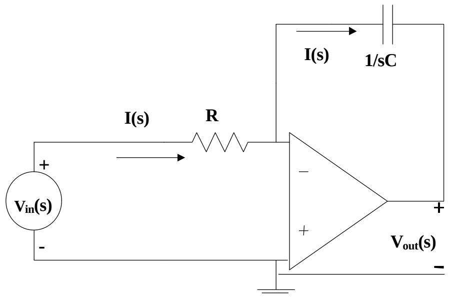

Figura n. 31

8.1 Analisi nel dominio delle Trasformate di Laplace.

Il circuito in esame (**Figura n. 31**) è costituito da un Amplificatore Operazione nella configurazione invertente. La Funzione di Trasferimento (F.d.T.) del circuito è:

$$\boxed{\overline{F(s)} = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{1/sC}{R} = -\frac{1}{sRC}} \qquad \textit{eq. 8.1.1}$$

Tale funzione presenta un POLO NELL'ORIGINE, giacché il valore s=0 annulla il denominatore della F.d.T.

8.2 Ricerca della F.d.T. direttamente dalla rete.

Il circuito presenta un polo perché uno è l'elemento reattivo.
Per s→∞ la tensione d'uscita, e quindi anche la F.d.T., tende a 0 (il Condensatore tende a comportarsi come un cortocircuito e la tensione d'uscita tende quindi alla massa virtuale). Di conseguenza il numero dei poli è superiore al numero degli zeri. Quindi non ci sono zeri.
Il valore del polo è dato dal valore finito di s che manda ad infinito la tensione d'uscita e quindi anche la F.d.T.. La continua, cioè s=0, manda ad infinito la reattanza del Condensatore di reazione, trasformando il circuito nella configurazione "ad anello aperto". Quindi per s=0 anche la tensione d'uscita tende ad infinito. Il polo della F.d.T. è nell'origine.
Si giunge allo stesso risultato calcolando la Resistenza che "si vede" ai capi di C, utilizzando lo schema riportato in **Figura n. 32**. La Resistenza R ha l'estremo A a massa reale e l'estremo B a massa virtuale; la d.d.p. ai suoi capi è quindi nulla e nulla deve essere anche la corrente che la attraversa. Di conseguenza la corrente I_0 è anch'essa nulla giacché non può circolare su R né entrare nell'Amplificatore Operazionale data la Resistenza d'ingresso idealmente infinita.

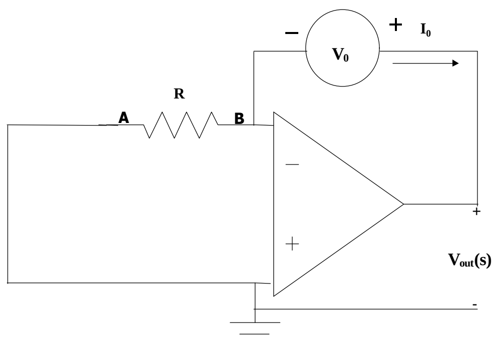

Figura n. 32

Se la corrente I_0 è nulla la Resistenza che "si vede" è infinita; quindi la costante tempo associata a C è anch'essa infinita e il suo inverso, che equivale alla pulsazione del polo, vale 0.
A questo punto sappiamo dall'analisi diretta della rete che la F.d.T. è del tipo:

$$\overline{F(s)} = \frac{K}{s} \qquad \textit{eq. 8.2.1}$$

rimane da calcolare il K, che in questo caso non può essere calcolato né per s →∞, né per s=0, poiché in entrambi i casi il valore della F.d.T. è determinato direttamente dalla variabile s. In questo caso per trovare il K è necessario imporre un particolare valore a s, per esempio -1/RC, ed eguagliare il valore della F.d.T. che si ricava dalla (8.2.1) con il valore che si ricava direttamente dalla rete.
Per s=-1/RC la (8.2.1) ci dice che:

$$\overline{F(-1/RC)} = -\frac{K}{1/RC} = -KRC \qquad \textit{eq. 8.2.2}$$

dalla rete, per s=-1/RC, l'impedenza del Condensatore diviene uguale a -R e, di conseguenza, l'Amplificazione che coincide con la F.d.T. assume il valore 1. Imponendo che il valore della F.d.T. trovato nella (8.2.2) sia uguale a quello trovato dalla rete, si ha:

$$-RCK = 1 \Rightarrow K = -\frac{1}{RC}$$

Sostituendo tale valore della costante K nella (8.2.1) si ricava:

$$\boxed{\overline{F(s)} = \frac{K}{s} = -\frac{1}{sRC}} \qquad \textit{eq. 8.2.3}$$

che coincide con l'espressione della F.d.T. trovata per via analitica nel paragrafo 8.1.

8.3 Risposta del circuito al segnale sinusoidale - DIAGRAMMI DI BODE.

Sostituendo nella F.d.T. alla variabile s il termine jω troviamo la ***risposta del circuito al segnale sinusoidale***. Abbiamo:

$$\overline{F(jw)} = -\frac{1}{jwRC}$$

Il **modulo** di tale funzione complessa vale:

$$\left|\overline{F(jw)}\right| = \frac{1}{wRC} \qquad \textit{eq. 8.3.1}$$

In scala logaritmica abbiamo:

$$\boxed{\mathrm{Log}\left|\overline{F(jw)}\right| = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{wRC}\right) = \mathrm{Log}1 - \mathrm{Log}(wRC) = -\mathrm{Log}w + \mathrm{Log}\frac{1}{RC}}$$

Quest'ultima funzione nel piano $\mathrm{Log}\left|\overline{F(jw)}\right| - \mathrm{Log}w$ è l'equazione di una retta di coefficiente angolare -1, quindi parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrate.

Tale retta incontra l'asse delle ordinate (che ha equazione $\mathrm{Log}w = 0$) per $\left|\overline{F(jw)}\right| = \frac{1}{RC}$.

Incontra invece l'asse delle ascisse (che ha equazione $\mathrm{Log}\left|\overline{F(jw)}\right| = 0$) per $w = \frac{1}{RC}$.

Troviamo ora l'andamento della **Fase** in funzione della frequenza:

$$\overline{F(jw)} = -\frac{1}{jwRC} = \frac{j}{wRC}$$

quindi:

$$\boxed{f = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} = \mathrm{arctg}\left[\left(\frac{1}{wRC}\right)\Big/ 0\right] = \mathrm{arctg}\,\infty = \frac{p}{2}} \qquad \textit{(8.3.2)}$$

LO SFASAMENTO RISULTA ESSERE p/2, CIOÈ 90°, TEORICAMENTE PER TUTTE LE FREQUENZE DALLA CONTINUA A FREQUENZA INFINITA.

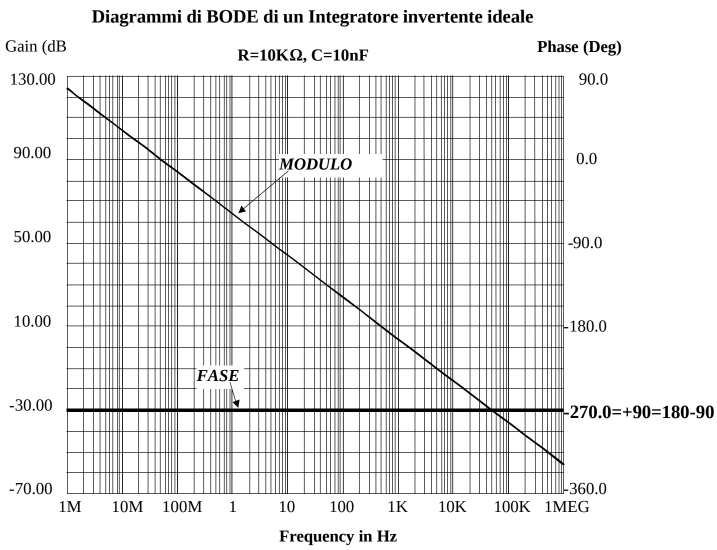

Figura n. 33

Occorre sottolineare che il nostro è un circuito **invertente** e quindi, se si vuole ricavare il contributo in Fase **del solo polo nell'origine,** occorre aggiungere (o togliere) allo sfasamento trovato i 180° legati al **segno meno**. Quindi:

IL CONTRIBUTO IN FASE DI UN POLO NELL'ORIGINE È DI 270°, (CHE EQUIVALE A -90°) SU TUTTO IL CAMPO DELLE FREQUENZE.

La simulazione a Calcolatore del circuito in esame, con **R=10KΩ e C=10nF**, fornisce i Diagrammi di Bode in **Figura n. 33**; essi risultano in accordo con quanto trovato per via teorica.

8.4 Risposta del circuito nel dominio del tempo ad un segnale qualsiasi.

Ricaviamo ora il legame nel **DOMINIO DEL TEMPO** tra la tensione d'uscita e la tensione d'ingresso.

Dalla (8.1.1) ed applicando uno dei teoremi fondamentali delle Trasformate di Laplace, quello dell'Integrale, si ha:

$$\boxed{V_{out}(s) = -\frac{1}{sRC}V_{in}(s) \Rightarrow \ell^{-1}[V_{out}(s)] = -\frac{1}{RC}\ell^{-1}\left[\frac{V_{in}(s)}{s}\right] \Rightarrow v_{out}(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_{in}(t)dt + K} \qquad \textit{eq. 8.4.1}$$

Alla stessa relazione nel tempo arriviamo analizzando il circuito in **Figura n.34**.

Essendo idealmente infinita la Resistenza d'ingresso dell'Amplificatore Operazionale, la corrente che circola in R è uguale a quella che circola in C.

Dall'equazione della maglia d'ingresso, chiusa sulla massa virtuale, ricaviamo:

$$v_{in}(t) = Ri_C(t) \Rightarrow i_C(t) = \frac{v_{in}(t)}{R}$$

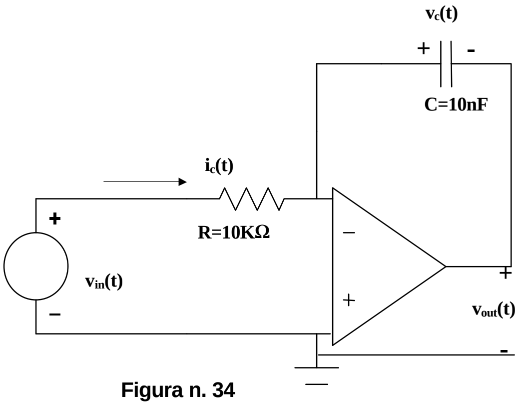

Figura n. 34

Dalla maglia d'uscita, anch'essa chiusa sulla massa virtuale, ricaviamo:

$$v_{out}(t) = -v_C(t)$$

ma sappiamo che:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \quad \textit{eq. 8.4.2}$$

e quindi:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt + K = -v_{out}(t) \qquad \textit{eq. 8.4.3}$$

Quindi:

$$\boxed{v_{out}(t) = -\frac{1}{C}\int_0^t \frac{v_{in}(t)}{R}dt + K = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_{in}(t)dt + K} \qquad \textit{eq. 8.4.4}$$

Dove la costante K rappresenta la tensione d'uscita (e quindi $-v_C$) all'istante iniziale.
Possiamo quindi affermare che:

La tensione d'uscita è direttamente proporzionale all'integrale della tensione d'ingresso. Il circuito si comporta come un INTEGRATORE INVERTENTE, dalla continua fino, teoricamente, a frequenza infinita.

*La caratteristica di **integrare anche la continua**, che a prima vista potrebbe sembrare solo un vantaggio, in realtà si rivela nella maggior parte dei casi **un inconveniente di portata tale da rendere in pratica non utilizzabile il circuito in esame**.*

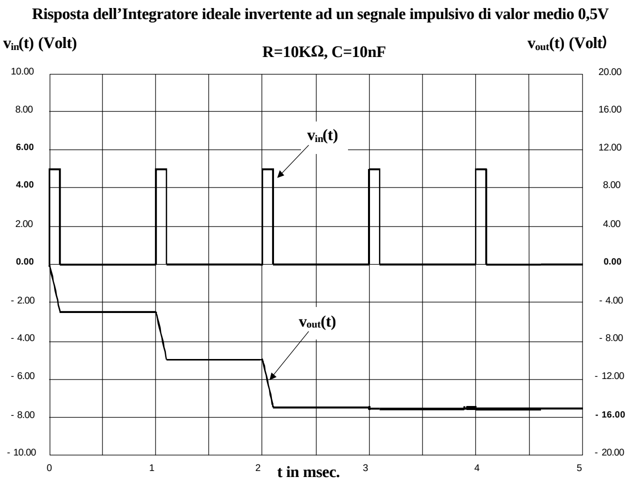

Figura n. 35

Infatti, sappiamo che l'integrale di una costante è una rampa, cioè una funzione che, in valore assoluto, cresce linearmente ed indefinitamente con il tempo. Poiché un qualsiasi segnale **reale**, anche se teoricamente a valor medio nullo, ha sempre un ancorché piccolo valor medio, avremo che, ponendo tale segnale in ingresso, il circuito esegue l'integrale non solo della componente a valor medio nullo ma anche del piccolo valor medio presente. **In uscita avremo dunque una rampa che farà saturare l'Amplificatore Operazionale**.

Per meglio comprendere quanto affermato si esamini la **Figura n. 35** che riporta la simulazione ottenuta ponendo all'ingresso dell'Integratore, con i valori di R e C riportati nello schema di **Figura n. 34**, un segnale impulsivo 0/5V, di frequenza 1KHz e Duty Cicle 10%, cioè di valor medio 0.5V.
La simulazione mostra come, in uscita, si abbia una gradinata negativa che si arresta quando la tensione raggiunge il valore di saturazione dell'Amplificatore Operazionale (nel caso della simulazione -15V).
Tale risultato è in accordo con la teoria.
Infatti, quando arriva il primo impulso si ha:

$$v_{out}(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t 5dt + K = -\frac{5t}{RC} + K$$

Poiché il Condensatore è inizialmente scarico, anche la tensione d'uscita del circuito è inizialmente nulla e di conseguenza la costante K vale in questo caso 0. L'equazione della tensione d'uscita non è altro che l'equazione di una retta passante per l'origine di coefficiente angolare -5/(RC).
Al termine del primo impulso la tensione d'uscita ha raggiunto il valore:

$$v_{out}\left(t = \frac{T}{10} = 100m\sec\right) = -\frac{5T}{10RC} = -5V$$

Terminato il primo impulso, la tensione d'ingresso rimane a zero per la restante parte del periodo. Di conseguenza abbiamo che la tensione d'uscita è:

$$v_{out}(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t 0dt + K = K$$

Cioè la tensione d'uscita rimane costante al valore che aveva raggiunto al termine del primo impulso.

All'arrivo del secondo impulso si ripete quanto è avvenuto sul primo, con l'unica differenza che ora la tensione iniziale dell'uscita non è più nulla ma vale -5V.

Risposta dell'Integratore invertente ideale alla componente continua del segnale impulsivo

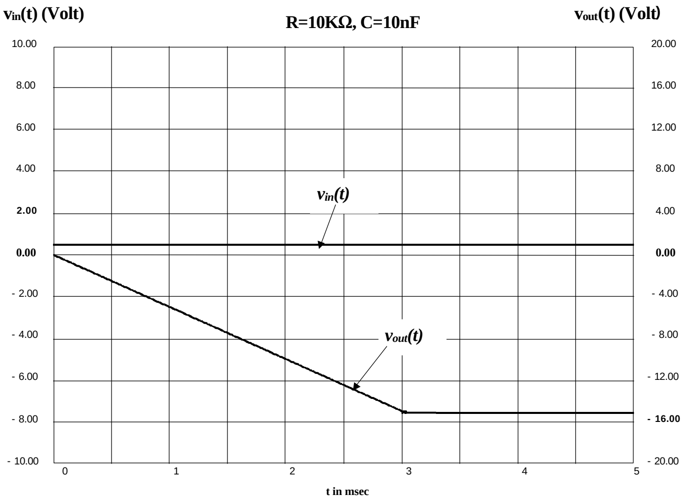

Figura n. 36

Risposta dell'Integratore invertente ideale alla componente a valor medio nullo del segnale impulsivo

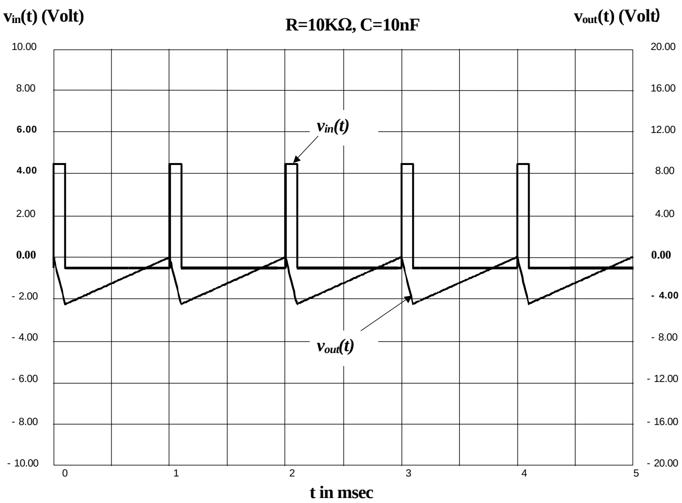

Figura n. 37

Durante il secondo impulso la tensione d'uscita si porta da -5V a -10V.
Quanto detto si ripete sul terzo impulso; l'Amplificatore Operazionale raggiunge la tensione di saturazione (-15V).
Gli impulsi successivi non hanno effetto sulla tensione d'uscita che rimane al valore di -15V.
Allo stesso risultato arriviamo attraverso il seguente procedimento:

1. scomponendo il segnale d'ingresso, a valor medio non nullo, nel suo valor medio e nella componente a valor medio nullo;

2. applicando separatamente al circuito le due componenti;

3. sovrapponendo i due effetti.

Il valor medio del segnale in esame vale 0.5V. Applicando in ingresso tale valore costante l'equazione della tensione d'uscita è:

$$v_{out}^{'}(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t 0.5dt + K = -\frac{0.5}{RC}t + K$$

Anche in questo caso il Condensatore è inizialmente scarico e quindi anche la tensione d'uscita è inizialmente nulla. La costante K vale 0 e l'equazione della tensione d'uscita è l'equazione di una retta passante per l'origine di coefficiente angolare -0.5/(RC).
Il tempo impiegato dall'uscita per raggiungere la tensione di saturazione è pari a 3msec. Quindi ponendo in ingresso il valor medio di 0.5V abbiamo che tra 0 e 3msec l'equazione della tensione d'uscita è:

$$v_{out}^{'}(t) = -\frac{0.5}{RC}t$$

mentre per t≥3msec l'equazione della tensione d'uscita è:

$$v_{out}^{'}(t) = -15V$$

La **Figura n. 36** riporta la simulazione dell'effetto della componente continua esaminato.
Se poniamo ora in ingresso la componente del segnale a valor medio nullo abbiamo che, quando nel primo "semiperiodo" la tensione d'ingresso vale 4.5V, la tensione d'uscita ha equazione:

$$v_{out}^{''}(t) = -\frac{4.5}{RC}t$$

Il valore di 4.5V permane in ingresso per un tempo pari a 100μsec. In quest'intervallo di tempo la tensione d'uscita raggiunge il valore di -4.5V.
Nel secondo "semiperiodo" il segnale d'ingresso vale -0.5V e l'equazione della tensione d'uscita è:

$$v_{out}^{''}(t) = +\frac{0.5}{RC}t - 4.5$$

In questo caso la tensione d'uscita parte dal valore di -4.5V raggiunto nel primo "semiperiodo"; è questo il valore che assume la costante K.
Il valore di -0.5V permane in ingresso per un tempo pari a 900μsec. In quest'intervallo di tempo la tensione d'uscita raggiunge il valore di 0V, cioè torna al valore che aveva all'inizio del periodo.
Nei periodi successivi non può che ripetersi quanto avvenuto nel primo. La **Figura n. 37** riporta la simulazione del caso ora esaminato.
Sommando matematicamente le equazioni o graficamente le curve si ottiene la verifica della validità del metodo della scomposizione e della sovrapposizione degli effetti, almeno fino a quando l'Amplificatore Operazionale ha un comportamento lineare, cioè fino a quando non satura.

8.5 Contributo di un polo nell'origine.

Quanto ricavato per il particolare circuito in esame (l'Integratore invertente ideale) ha una valenza generale nel senso che qualsiasi circuito, anche che abbia più poli e più zeri (questi ultimi tutti non nulli), che abbia comunque un solo polo nell'origine si comporta, **almeno fino ad una decade prima del primo polo non nullo o del primo zero**, come l'Integratore invertente ideale, a parte il segno meno (-).
Quindi un circuito che abbia una F.d.T. con un **POLO NELL'ORIGINE** del tipo:

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s\tau} G(s)} \quad \textit{eq. 8.5.1}$$

con G(s) che abbia un numero qualsiasi di poli e zeri non nulli, nel campo di frequenze dette, cioè **FINO AD UNA DECADE PRIMA DELLA FREQUENZA DEL PRIMO POLO O DEL PRIMO ZERO DELLA G(S)**:

⇒ *HA UN DIAGRAMMA DI BODE DEL **MODULO** DEL GUADAGNO CHE **SCENDE**, A PARTIRE DALLA CONTINUA, CON UNA PENDENZA DI -**20DB** PER DECADE (CIRCA -6DB PER OTTAVA);*

⇒ *HA, A PARTIRE DALLA CONTINUA, UN DIAGRAMMA DI BODE DELLA **FASE** COSTANTE ED UGUALE A **-90°;***

⇒ *INTEGRA QUALSIASI SEGNALE POSTO IN INGRESSO CHE ABBIA UNA FREQUENZA COMPRESA NEL DETTO CAMPO DI FREQUENZE;*

⇒ *INTEGRANDO, SE PRESENTE (COME AVVIENE DI FATTO IN QUALSIASI SEGNALE REALE) ANCHE LA COMPONENTE CONTINUA DEL SEGNALE POSTO IN INGRESSO, IL CIRCUITO, DOPO UN TEMPO PIÙ O MENO LUNGO, SATURA.*