12. F.d.T. con uno ZERO nell'origine ed un POLO non nell’origine: Derivatore invertente reale.

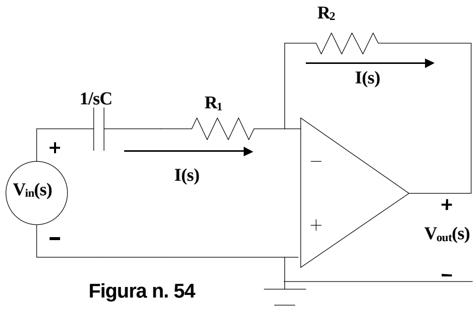

Figura n. 54

12.1 Analisi nel dominio delle trasformate di Laplace.

Il circuito riportato in **Figura n. 54** è riconducibile a quello di un Amplificatore Operazionale nella configurazione invertente.
Di conseguenza possiamo scrivere:

$$\overline{F(s)} = -\frac{\overline{Z_2(s)}}{\overline{Z_1(s)}}$$

Per prima cosa troviamo $\mathbf{Z}_1$(s):

$$\overline{Z_1(s)} = R_1 + \frac{1}{sC} = \frac{R_1 sC + 1}{sC}$$

Quindi:

$$\boxed{\overline{F(s)} = -\frac{R_2}{\frac{R_1 sC + 1}{sC}} = -\frac{sR_2C}{1 + sR_1C}} \qquad \textit{eq. 12.1.1}$$

La F.d.T. trovata presenta:

- **uno ZERO NELL ORIGINE dal momento per s=0 annulla il numeratore della Funzione e quindi la Funzione stessa;**
- **un POLO per s=-1/R_1C, giacché tale valore annulla il denominatore della funzione.**

12.2 Ricerca della F.d.T. direttamente dalla rete.

Il circuito presenta un elemento reattivo e quindi la sua F.d.T. ha un polo (se esiste un valore di s **finito** che manda ad infinito l’uscita). Affinché l’uscita vada ad infinito è necessario e sufficiente che Z1 sia nullo. Quindi il valore del polo è dato dal valore di s che annulla Z1.
Si ha:

$$\overline{Z_1(s)} = \frac{R_1 sC + 1}{sC} = 0 \Leftrightarrow R_1 sC + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{R_1 C}$$

Quindi la F.d.T. ha un polo per $s = -\frac{1}{R_1 C}$

Per $s \to \infty$ la F.d.T. tende a $-\frac{R_2}{R_1}$, cioè tende ad un valore finito.
Quindi il grado del numeratore della F.d.T. è uguale al grado del denominatore ed uguale ad uno.
Di conseguenza la F.d.T. ha uno zero.
Lo zero è dato dal valore finito di s che annulla l’uscita. Tale valore è dato da **s=0** giacché rispetto alla continua il condensatore in serie all’ingresso si comporta come un circuito aperto portando a zero la I(s) e quindi la tensione d’uscita.
Quindi la F.d.T. ha uno zero nell’origine ed un polo non nell’origine. Essa è del tipo:

$$\overline{F(s)} = K\frac{s}{1 + sR_1C} \qquad \textit{eq. 12.2.1}$$

Rimane da trovare la costante K.
Essa si trova imponendo che il valore che la (12.2.1) assume per $s \to \infty$ sia uguale al valore che, sotto la stessa condizione, la F.d.T. assume ricavandola direttamente dal circuito.
Per $s \to \infty$ dalla (12.1.1) si ha:

$$\lim_{s\to\infty} K\frac{s}{1 + sR_1C} = \frac{K}{R_1C} \qquad \textit{eq. 12.2.2}$$

Dalla rete si ha che per $s \to \infty$ la F.d.T. tende a

$$\lim_{s\to\infty}\overline{F(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \qquad \textit{eq. 12.2.3}$$

dal momento che per $s \to \infty$ il condensatore tende a comportarsi come un cortocircuito e il circuito tende quindi a comportarsi come un semplice amplificatore invertente.
Imponendo l'uguaglianza tra la (12.2.2) e la (12.2.3) si ricava la costante K.

$$\boxed{\frac{K}{R_1C} = -\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow K = -R_2C} \qquad \textit{eq. 12.2.4}$$

Sostituendo la (12.2.4) nella (12.2.1) si ricava:

$$\boxed{\overline{F(s)} = -\frac{sR_2C}{1+sR_1C}} \qquad \textit{eq. 12.2.5}$$

che coincide con la F.d.T. ricavata al paragrafo 12.1.

12.3 Risposta del circuito al segnale sinusoidale - DIAGRAMMI DI BODE.

Per ricavare i diagrammi di Bode dobbiamo passare nel regime sinusoidale e quindi sostituire a s il termine jω:

$$\overline{F(j\omega)} = -\frac{j\omega R_2C}{1+j\omega R_1C} = -\frac{\omega R_2C}{1+\omega^2R_1^2C^2}(\omega R_1C + j) \qquad \textit{eq. 12.3.1}$$

Eseguiamo il **modulo** di tale funzione:

$$\left|\overline{F(j\omega)}\right| = \frac{\omega R_2C}{\sqrt{1+\omega^2R_1^2C^2}} \qquad \textit{eq. 12.3.2}$$

Facendo il logaritmo di entrambi i membri si ha:

$$\boxed{\mathrm{Log}\left|\overline{F(j\omega)}\right| = \mathrm{Log}\frac{\omega R_2C}{\sqrt{1+\omega^2R_1^2C^2}} = \mathrm{Log}(\omega R_2C) - \mathrm{Log}\left(\sqrt{1+\omega^2R_1^2C^2}\right)} \qquad \textit{eq. 12.3.3}$$

Da quest'ultima relazione notiamo che l'andamento di $\mathrm{Log}\left|\overline{F(j\omega)}\right|$ non è altro che la somma algebrica di due addendi di cui:

- **Il primo $[\mathrm{Log}(\omega R_2C)]$ è l'andamento dello zero nell'origine [vedi (9.3.3)];**
- **Il secondo $\left[-\mathrm{Log}\left(\sqrt{1+\omega^2R_1^2C^2}\right)\right]$ è quello del polo non nell'origine [vedi (10.3.6) con R_2=R_1].**

Per quanto riguarda la **Fase** abbiamo che il segno - porta un contributo allo sfasamento di 180° per tutte le frequenze.
Sovrapposto a tale contributo costante c'è uno sfasamento, dipendente dalla frequenza, che è dato, come si ricava dalla (12.3.1), da::

$$\boxed{\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} = \mathrm{arctg}\frac{1}{\omega R_1C}} \qquad \textit{eq. 12.3.4}$$

Cioè, a parte il segno meno, lo sfasamento vale:

⇒ *PER $\omega \to$ **0** LO SFASAMENTO φ VALE **+90°;***

⇒ *PER $\omega \to \infty$ LO SFASAMENTO φ TENDE A **0°;***

⇒ *ALLA PULSAZIONE DEL POLO $\omega = 1/R_1C$ LO SFASAMENTO φ VALE **+45°.***

Prendendo in considerazione anche il segno meno occorre aggiungere (o togliere) 180° per tutte le frequenze e quindi per il circuito in esame abbiamo che lo sfasamento:

⇒ *PER $\omega \to$ **0** LO SFASAMENTO φ VALE **+90°-180°= -90°;***

⇒ *PER $\omega \to \infty$ LO SFASAMENTO φ TENDE A **0°-180°= -180°***

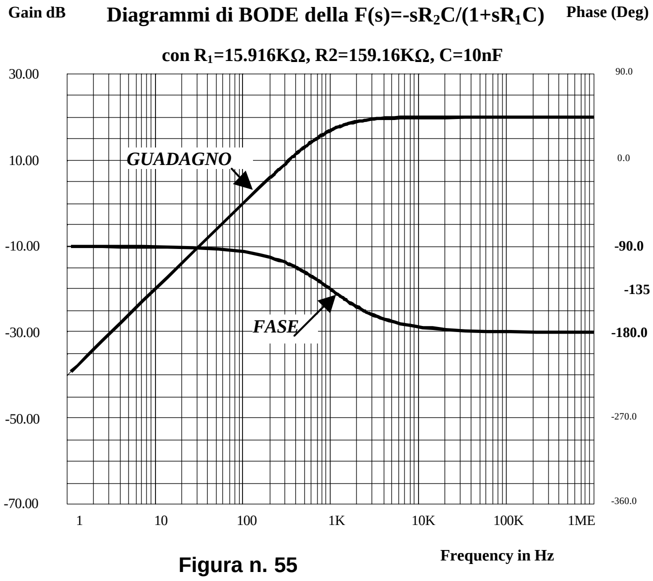

Figura n. 55

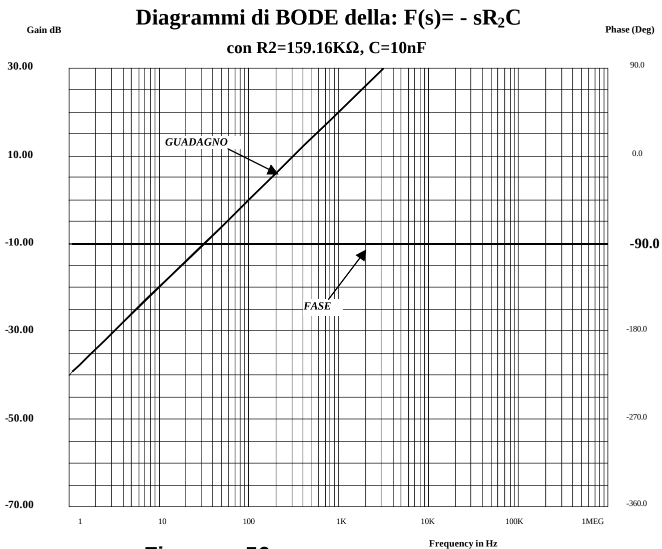

Figura n. 56

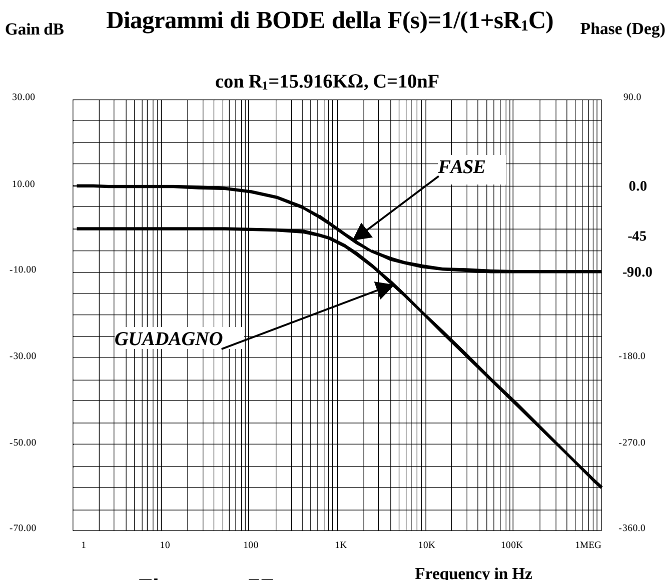

Figura n. 57

⇒ *ALLA PULSAZIONE DEL POLO $w = 1/R_1C$ LO SFASAMENTO f VALE* ***+45°-180°= -135°***

Anche nel caso dello sfasamento si ha che:

lo sfasamento del circuito nel suo complesso è dato, per ogni frequenza, dalla somma algebrica dei seguenti contributi:

- **contributo del segno meno, che vale -180° per tutte le frequenze;**
- **contributo dello ZERO NELL ORIGINE che vale +90° per tutte le frequenze;**
- **contributo nel polo a $w = 1/R_1C$ che vale**
  - **0° dalla continua fino a frequenze inferiori di una decade prima la frequenza del polo**
  - **-90° per le frequenze superiori ad una decade dopo la frequenza del polo;**
  - **-45° alla frequenza del polo.**

I tre diagrammi di Bode riportati alle **Figure nn. 55, 56 e 57** rappresentano l'andamento del Modulo e della Fase rispettivamente:

- *della F.d.T. (12.1.1) COMPLESSIVA;*
- *del solo zero nell'origine con il contribuito del segno meno;*
- *del solo polo non nell'origine.*

Si può notare che, ad ogni frequenza, sia per il Modulo sia per la Fase, la somma algebrica dei valori alle **Figure nn 56 e 57** coincide con il valore, a quella frequenza, in **Figura n 55**. Quanto detto ha una valenza generale.

In generale, dovendo ricavare i diagrammi di Bode di una data Funzione di Trasferimento, potremo individuare il numero ed il valore dei poli e degli zeri della F.d.T., trovare il contributo in Modulo e Fase di ognuno di essi ed infine sommare i vari contributi

Da quanto detto si dovrebbe comprendere in via definitiva il vantaggio di utilizzare la scala logaritmica per i diagrammi del Modulo delle F.d.T. e semilogaritmica per quelli della Fase.

12.4 Risposta del circuito nel dominio del tempo ad un segnale qualsiasi.

Partiamo dalla F.d.T. del circuito in esame.

$$\boxed{\overline{F(s)} = -\frac{sR_2C}{1+sR_1C}} \qquad \text{eq. 12.4.1}$$

Confrontando i Diagrammi di Bode in **Figura n.55** con quelli in **Figura n. 39** notiamo che fino ad una decade prima la frequenza del polo il circuito ha gli stessi Diagrammi di Bode del Derivatore Invertente ideale, con il **Guadagno** che **sale** di +**20dB per decade** e la **fase** che vale **-90°.**

Dovrebbe, a questo punto, risultare evidente qual è il comportamento del circuito in esame nel citato campo di frequenze. Lo andiamo comunque a dimostrare più per esercizio che perché ce ne sia effettivamente bisogno dal momento che quanto abbiamo fin qui dimostrato è già ampiamente sufficiente per ricavare il comportamento del circuito.

Nel campo di frequenze citato, cioè dalla continua fino ad una decade prima del polo, si ha:

$$\boxed{s << \frac{1}{R_1C} \Rightarrow sR_1C << 1} \qquad \text{eq. 12.4.2}$$

La F.d.T. diventa:

$$\boxed{\overline{F(s)} = -sR_2C} \qquad \text{eq. 12.4.3}$$

che è del tutto analoga alla (9.1.1).

Quindi, **SOLO PER IL CAMPO DI FREQUENZE PER IL QUALE SI È RICAVATA LA (12.4.3),** si ha:

$$\boxed{v_{out}(t) = -R_2C\frac{dv_{in}(t)}{dt}} \qquad \text{eq. 12.4.4}$$

Invece per

$$\boxed{s >> \frac{1}{R_1C} \Rightarrow sR_1C >> 1} \qquad \text{eq. 12.4.5}$$

La F.d.T. diventa:

$$\boxed{\overline{F(s)} = -\frac{sR_2C}{sR_1C} = -\frac{R_2}{R_1}} \qquad \text{eq. 12.4.6}$$

Quindi, **SOLO PER IL CAMPO DI FREQUENZE PER IL QUALE SI È RICAVATA LA (12.4.6),** si ha:

$$\boxed{v_{out}(t) = -\frac{R_2}{R_1}v_{in}(t)} \qquad \text{eq. 12.4.7}$$

Il circuito si comporta come un DERIVATORE INVERTENTE dalla continua fino ad una decade prima della pulsazione del polo. Quindi qualsiasi segnale sia posto in ingresso, a valor medio nullo o non nullo, di ritrova in uscita derivato e quindi sempre a valor medio nullo.

Il circuito si comporta invece come un AMPLIFICATORE INVERTENTE la sola componente a valor medio nullo del segnale da una decade dopo la pulsazione del polo. Quindi qualsiasi segnale sia posto in ingresso, a valor medio nullo o non nullo, di ritrova in uscita amplificato (o attenuato) di -R_2/R_1 e sempre a valor medio nullo, dal momento che l eventuale componente continua è comunque derivata

Per questo suo comportamento il circuito in esame è chiamato solitamente **DERIVATORE INVERTENTE REALE** per distinguerlo sia da quello definito ideale (che deriverebbe a tutte le frequenze) sia dal circuito visto in precedenza con uno zero non nell'origine (che deriva la sola componente a valor medio nullo del segnale purché di frequenza superiore ad una decade la frequenza dello zero), circuiti che presentano entrambi problemi di funzionamento a causa dell'amplificazione idealmente infinita delle componenti armoniche in alta frequenza del segnale d'ingresso.

ESERCIZIO: Applichiamo all ingresso del circuito di Figura n. 54 un segnale triangolare 2/-1V, frequenza 1KHz e tratto a coefficiente angolare positivo pari al 25% del periodo.

Trovare l andamento della tensione d uscita per:

1) **R1=240KΩ, C=22nF, R2=480KΩ**

2) **R1=68KΩ, C=47pF, R2=136kΩ**

12.5 Comportamento del circuito R-C, uscita su R.

La F.d.T. di un circuito R-C, con uscita su R, si dovrebbe a questo punto saper trovare abbastanza agevolmente.

Abbiamo:

$$\overline{V_R(s)} = R \cdot \overline{I(s)} = \frac{R \cdot \overline{V_{in}(s)}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1+sRC}\overline{V_{in}(s)}$$

e quindi:

$$\boxed{\overline{F(s)} = \frac{sRC}{1+sRC}} \quad \textit{eq. 12.5.1}$$

La F.d.T. (12.5.1) è del tutto analoga, a parte la diversa costante K, alla F.d.T. (12.1.1) del circuito in esame. Tutto quello che abbiamo ricavato sul comportamento del Derivatore invertente reale vale ovviamente anche per tutti gli altri circuiti che presentino una F.d.T. con uno zero nell origine ed un polo non nell origine e quindi in particolare vale per il circuito R-C, uscita su R, ponendo R_2=R_1=R e trascurando l'effetto sulla Fase del segno (meno).

ESERCIZIO: Applichiamo all ingresso del circuito R-C un segnale triangolare 2/-1V, frequenza 1KHz e tratto a coefficiente angolare positivo pari al 25% del periodo.

Trovare l andamento della tensione d uscita su R per:

1) **R=240KΩ, C=22nF**

2) **R=68KΩ, C=47pF**