

11. F.D.T. con uno ZERO non nell'origine.

11.1 Analisi nel dominio delle trasformate di Laplace.

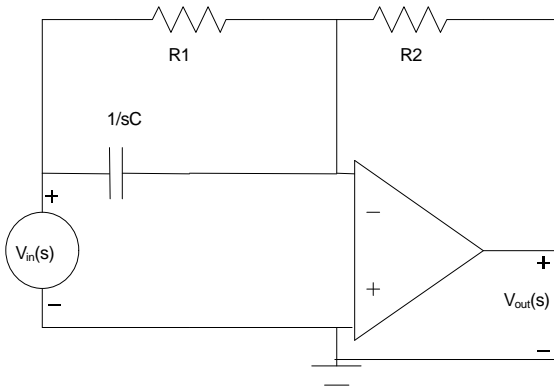


Figura n. 52

Il circuito riportato in **Figura n. 52** è riconducibile a quello di un Amplificatore Operazionale nella configurazione invertente. Di conseguenza possiamo scrivere:

$$\overline{F}(s) = -\frac{\overline{Z}_2(s)}{\overline{Z}_1(s)}$$

Per prima cosa troviamo $\overline{Z}_1(s)$:

$$\overline{Z}_1(s) = \frac{R_1 \frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_1}{sR_1C + 1}$$

Quindi:

$$\overline{F}(s) = -\frac{R_2}{R_1/sR_1C + 1} = -\frac{R_2(sR_1C + 1)}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1}(sR_1C + 1)$$

eq. 11.1.1

La F.d.T. trovata presenta **UNO ZERO PER $s = -1/R_1C$** , giacché tale valore annulla la funzione.

11.2 Ricerca della F.d.T. direttamente dalla rete.

Anche in questo caso, come in quello del Derivatore Invertente Ideale, saremmo portati ad ipotizzare l'esistenza di un polo, data la presenza di un elemento reattivo. In realtà notiamo che l'uscita tende ad infinito per il valore di s che manda a zero il parallelo tra R_1 ed $1/sC$, cioè per il valore di s che manda a zero $1/sC$, cioè per $s \rightarrow \infty$. Quindi non esistono valori **finiti** di s che mandino ad infinito la F.d.T. del circuito e quindi il circuito in esame non ha poli.

Abbiamo già affermato che per $s \rightarrow \infty$ la F.d.T. tende ad infinito. Di conseguenza il numero degli zeri è superiore al numero dei poli. Il valore dello zero è dato dal valore finito di s che manda a zero l'uscita del circuito, e quindi anche la F.d.T..

Per mandare a zero l'uscita del circuito è necessario che il parallelo tra R_1 ed $1/sC$ tenda ad infinito, vale a dire che l'inverso di tale parallelo sia nullo.

Si ha:

$$\frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{R_1} + sC = \frac{1 + sR_1C}{R_1} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{R_1C}$$

A questo punto possiamo affermare che la F.d.T. del circuito in esame è del tipo:

$$\overline{F}(s) = K \cdot (1 + sR_1C) \quad \text{eq. 11.2.1}$$

Per trovare il valore del K imponiamo che la (11.2.1) e il circuito diano lo stesso valore costante della F.d.T. per $s=0$. Dalla (11.2.1) si ha:

$$\overline{F}(0) = K$$

Dal circuito si ha che rispetto alla continua il Condensatore si comporta come un circuito aperto e di conseguenza si ha:

$$\overline{F}(0) = -\frac{R_2}{R_1}$$

Eguagliando le ultime due relazioni si ricava la costante K e quindi la F.d.T. del circuito:

$$\overline{F}(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot (1 + sR_1C) \quad \text{eq. 11.2.2}$$

che coincide con la funzione trovata per via analitica al paragrafo 11.1

11.3 Risposta del circuito al segnale sinusoidale - DIAGRAMMI DI BODE.

Sostituendo nella F.d.T. trovata alla variabile s il termine $j\omega$ troviamo:

$$\overline{F}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot (1 + j\omega R_1C) \quad \text{eq. 11.3.1}$$

Eseguiamo il **modulo** di tale funzione:

$$\boxed{|F(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \sqrt{1 + \omega^2 R_1^2 C^2}} \quad \text{eq. 11.3.2}$$

Facendo il logaritmo di entrambi i membri si ha:

$$\text{Log}|F(j\omega)| = \text{Log} \frac{R_2}{R_1} + \text{Log} \sqrt{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} \quad \text{eq. 11.3.3}$$

Quest'ultima relazione per:

$$\boxed{\omega R_1 C \ll 1 \Rightarrow \omega \ll \frac{1}{R_1 C}} \quad \text{eq. 11.3.4}$$

si riduce a:

$$\boxed{\text{Log}|F(j\omega)| \approx \text{Log} \frac{R_2}{R_1} + \text{Log} 1 = \text{Log} \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{eq. 11.3.5}$$

Cioè, nel piano $\text{Log}|F(j\omega)| / \text{Log} \omega$, si riduce ad una **retta parallela all'asse delle ascisse**.

La (11.3.3) per:

$$\boxed{\omega R_1 C \gg 1 \Rightarrow \omega \gg \frac{1}{R_1 C}} \quad \text{eq. 11.3.6}$$

si riduce a:

$$\text{Log}|F(j\omega)| \approx \text{Log} \frac{R_2}{R_1} + \text{Log} \omega R_1 C = \text{Log} \frac{R_2}{R_1} + \text{Log} \omega + \text{Log} R_1 C = \text{Log} \omega - \text{Log} \frac{1}{R_2 C} \quad \text{eq. 11.3.7}$$

Quest'ultima espressione, nel piano $\text{Log}|F(j\omega)| / \text{Log} \omega$, è l'equazione di una **retta parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante** che incontra l'asse delle ascisse per $\omega = 1/R_2 C$ e quello delle ordinate per $|F(j\omega)| = R_2 C$.

Quindi possiamo affermare che il Diagramma di Bode del modulo, nel piano $\text{Log}|F(j\omega)| / \text{Log} \omega$, è dato da:

- ⇒ **UNA RETTA PARALLELA ALL'ASSE $\text{Log} \omega$ PER FREQUENZE FINO AD UNA DECADE PRIMA DELLA FREQUENZA DELLO ZERO;**
- ⇒ **UNA RETTA DI COEFFICIENTE ANGOLARE +1, QUINDI PARALLELA ALLA BISETTRICE DEL PRIMO E DEL TERZO QUADRANTE, DA UNA DECADE DOPO LA FREQUENZA DELLO ZERO.**

Per quanto riguarda la **Fase** abbiamo che il segno - porta un contributo allo sfasamento di 180° per tutte le frequenze. Sovrapposto a tale contributo costante c'è uno sfasamento, dipendente dalla frequenza, che è dato da:

$$\boxed{f = \text{arctg} \frac{b}{a} = \text{arctg} \frac{\omega R_1 C}{1} = \text{arctg}(\omega R_1 C)} \quad \text{eq. 11.3.8}$$

Dalla (11.3.8) si ricava il contributo in fase del solo zero non nell'origine:

- ⇒ **PER $\omega=0$ LO SFASAMENTO VALE 0° ;**
- ⇒ **PER ω CHE TENDE AD INFINITO LO SFASAMENTO TENDE A $+90^\circ$;**
- ⇒ **ALLA PULSAZIONE DELLO ZERO LO SFASAMENTO VALE $+45^\circ$.**

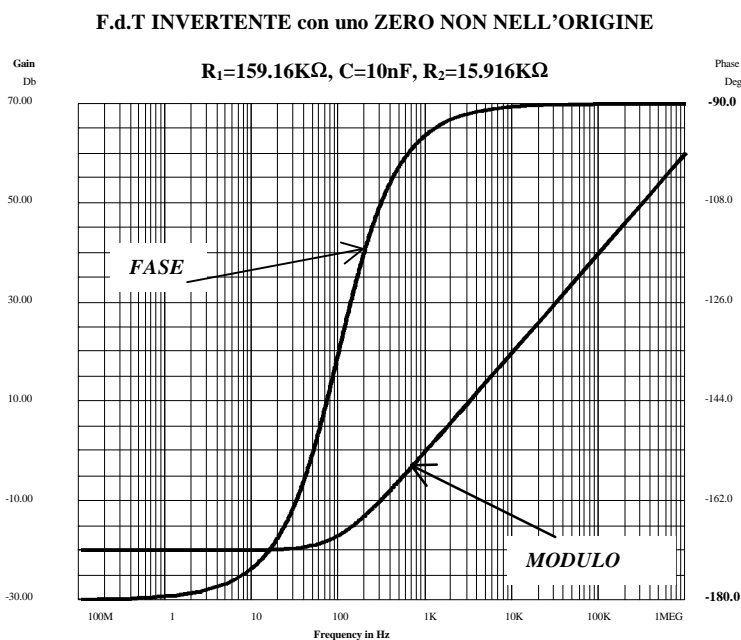


Figura n. 53

La simulazione a calcolatore riportata in **Figura n. 53** mostra i Diagrammi di Bode del circuito in **Figura n. 52** per **$R_1=159.16K\Omega$, $C=10nF$, $R_2=15.916K\Omega$** (i valori delle resistenze sono presi per avere a 100Hz il valore dello zero ed un Guadagno in bassa frequenza di 0.1).

11.4 Risposta del circuito nel dominio del tempo ad un segnale qualsiasi.

Torniamo alla Funzione di trasferimento del circuito di **Figura n. 52**.

$$\overline{F}(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot (1 + sR_1C) \quad \text{eq. 11.4.1}$$

Confrontando i Diagrammi di Bode in **Figura n.53** con quelli in **Figura n. 39** notiamo che, da una decade dopo la frequenza dello zero, il circuito ha gli stessi Diagrammi di Bode del Derivatore Invertente ideale, con il **Guadagno** che **sale** di **+20dB per decade** e la **fase** che vale **-90°**.

In questo campo di frequenze, cioè per

$$sR_1C \gg 1 \quad \text{eq. 11.4.2}$$

La F.d.T. diventa:

$$\overline{F}(s) = -\frac{R_2}{R_1} sR_1C = -sR_2C \quad \text{eq. 11.4.3}$$

che è del tutto analoga alla (9.1.1).

Quindi, **SOLO PER IL CAMPO DI FREQUENZE PER IL QUALE SI È RICAVATA LA (11.4.3)**, si ha:

$$v_{out}(t) = -R_2C \frac{dv_{in}(t)}{dt} \quad \text{eq. 11.4.4}$$

Invece per

$$sR_1C \ll 1 \quad \text{eq. 11.4.5}$$

La F.d.T. diventa:

$$\overline{F}(s) = -\frac{R_2}{R_1} \quad \text{eq. 11.4.6}$$

Quindi, **SOLO PER IL CAMPO DI FREQUENZE PER IL QUALE SI È RICAVATA LA (11.4.6)**, si ha:

$$v_{out}(t) = -\frac{R_2}{R_1} v_{in}(t) \quad \text{eq. 11.4.7}$$

Il circuito si comporta come un **AMPLIFICATORE INVERTENTE** dalla continua fino ad una decade prima della pulsazione dello zero: in questo campo di frequenze amplifica (o attenua) di $-R_2/R_1$ il segnale d'ingresso e l'eventuale componente continua del segnale d'ingresso qualunque sia la sua frequenza.

Il circuito si comporta come un **DERIVATORE INVERTENTE** la sola componente a valor medio nullo da una decade dopo la pulsazione del polo.

ESERCIZIO: Applichiamo all'ingresso del circuito di **Figura n. 52** un segnale triangolare 2/-1V, frequenza 1KHz e tratto a coefficiente angolare positivo pari al 25% del periodo.

Trovare l'andamento della tensione d'uscita per:

- 1) $R_1=240K\Omega$, $C=22nF$, $R_2=120K\Omega$
- 2) $R_1=68\Omega$, $C=47nF$, $R_2=136\Omega$

11.5 Contributo di uno zero non nell'origine.

Quanto ricavato per il particolare circuito in esame ha una valenza generale nel senso che uno zero non nell'origine porta un contributo sui Diagrammi di Bode di un qualsiasi circuito, anche che abbia più poli e più zeri, come quello riportato in **Figura n. 53**. **CIOÈ, PER IL DIAGRAMMA DI BODE RELATIVO AL MODULO E LINEARIZZANDO LE CURVE, ESSO:**

⇒ *RIMANE COSTANTE FINO ALLA FREQUENZA DELLO ZERO;*

⇒ *PER FREQUENZE MAGGIORI DI QUELLE DELLO ZERO AUMENTA LINEARMENTE CON UNA PENDENZA DI +20DB PER DECADE (CIRCA +6DB PER OTTAVA).*

PER IL DIAGRAMMA DI BODE RELATIVO ALLA FASE, E LINEARIZZANDO LE CURVE, ESSO:

- ⇒ *RIMANE UGUALE A 0° FINO AD UNA DECADE PRIMA DELLA FREQUENZA DELLO ZERO;*
- ⇒ *TRA UNA DECADE PRIMA ED UNA DECADE DOPO LA FREQUENZA DELLO ZERO LA FASE PASSA DA 0° A $+90^\circ$;*
- ⇒ *ALLA FREQUENZA DELLO ZERO LA FASE VALE $+45^\circ$;*
- ⇒ *DA UNA DECADE DOPO LA FREQUENZA DELLO ZERO LA FASE RESTA UGUALE A $+90^\circ$.*

L'effetto concreto dipenderà in questo caso dai poli e dagli zeri di frequenza inferiore a quella dello specifico zero in esame. Vedremo in seguito il significato concreto di quanto affermato.