

10. F.d.T. con un POLO NON NELL'ORIGINE: Integratore invertente reale.

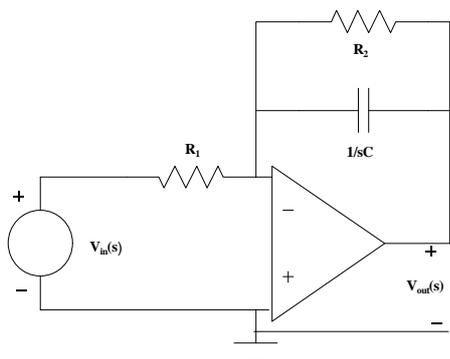


Figura n. 42

10.1 Analisi nel dominio delle Trasformate di Laplace.

Il circuito in esame (Figura n. 42) è costituito da un Amplificatore Operazionale nella configurazione invertente. La F.d.T. del circuito è:

$$\overline{F(s)} = -\frac{\overline{Z_2(s)}}{\overline{Z_1(s)}} = -\frac{R_2/(1+sCR_2)}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1+sR_2C} \quad \text{eq. 10.1.1}$$

Tale F.d.T. presenta UN POLO per $s=-1/R_2C$ giacché tale valore di s annulla il denominatore.

LA F.D.T. (10.1.1) È DEL TUTTO ANALOGA, A PARTE LA DIVERSA COSTANTE K, ALLA F.D.T. RICAVATA PER UN CIRCUITO R-C CON USCITA SU C [VEDI RELAZIONI (5.9), (6.1) E (6.13)]. QUINDI TUTTO QUELLO CHE RICAVEREMO PER QUESTO CIRCUITO VARRÀ ANCHE PER TUTTI GLI ALTRI CIRCUITI CHE PRESENTINO UNA F.D.T. CON UN SOLO POLO NON NELL'ORIGINE ED IN PARTICOLARE VARRÀ PER IL CIRCUITO R-C, USCITA SU C, PONENDO $R_2=R_1$ E TRASCURANDO L'EFFETTO IN FASE DEL SEGNO – (MENO).

10.2 Ricerca della F.d.T. direttamente dalla rete.

Il circuito presenta un polo perché è uno l'elemento reattivo.

Per $s \rightarrow \infty$ la tensione d'uscita, e quindi anche la F.d.T., tende a 0 (il Condensatore tende a comportarsi come un cortocircuito e la tensione d'uscita tende quindi alla massa virtuale). Di conseguenza il numero dei poli è superiore al numero degli zeri. Quindi non ci sono zeri.

Il valore del polo è dato dal valore finito di s che manda ad infinito la tensione d'uscita e quindi anche la F.d.T.

La tensione d'uscita va ad infinito per i valori di s che mandano ad infinito l'impedenza parallelo di R_2 e $1/sC$. Troviamo tale parallelo ed imponiamo che il suo inverso sia nullo. Si ha:

$$\frac{1}{\overline{Z_2}} = \frac{1}{R_2} + sC = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{R_2C} \quad \text{eq. 10.2.1}$$

Tale valore della s è, per definizione, il polo della F.d.T..

Si giunge allo stesso risultato calcolando la Resistenza che si vede ai capi di C.

Per fare ciò occorre cortocircuitare il generatore indipendente di tensione e sostituire al Condensatore un generatore di prova V_0 come è fatto nella Figura n. 43. La Resistenza R_1 ha un estremo a massa reale e l'altro a massa virtuale e di conseguenza in essa non può circolare corrente.

L' I_0 circola tutta su R_2 e di conseguenza:

$$V_0 = R_2 I_0 \Rightarrow R_{\text{chesivede}} = \frac{V_0}{I_0} = R_2 \quad \text{eq. 10.2.2}$$

Quindi la costante tempo associata alla Capacità è R_2C e la pulsazione del polo è data dall'inverso di tale prodotto, come abbiamo già trovato nella (10.2.1) per altra via.

A questo punto sappiamo dall'analisi diretta della rete che la F.d.T. è del tipo:

$$\overline{F(s)} = \frac{K}{sR_2C + 1} \quad \text{eq. 10.2.3}$$

rimane da calcolare la costante K.

In questo caso non può essere calcolato per $s \rightarrow \infty$ giacché la F.d.T. tende a 0 come si vede sia della (10.2.3) che dalla rete.

È invece agevole calcolare il K per $s=0$; infatti dalla (10.2.3) si ricava:

$$\overline{F(0)} = K \quad \text{eq. 10.2.4}$$

Tenendo presente che rispetto alla continua il Condensatore si comporta come un circuito aperto, dalla rete si ricava che:

$$\overline{F(0)} = -\frac{R_2}{R_1} \quad \text{eq. 10.2.5}$$

Imponendo l'uguaglianza tra queste due ultime relazioni si ricava il K. La F.d.T. del circuito è data da:

$$\overline{F(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1+sR_2C} \quad \text{eq. 10.2.6}$$

che coincide con l'espressione della F.d.T. trovata per via analitica al paragrafo 10.1.

10.3 Risposta del circuito al segnale sinusoidale - DIAGRAMMI DI BODE.

Sostituendo nella F.d.T. alla variabile s il termine $j\omega$ troviamo:

$$\boxed{\overline{F}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega R_2 C}} \quad \text{eq. 10.3.1}$$

Il **modulo** di tale funzione complessa, che è chiamato anche **GUADAGNO** del circuito, vale:

$$\boxed{|\overline{F}(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}}} \quad \text{eq. 10.3.2}$$

Come abbiamo già visto (paragrafo 3)

Si definisce FREQUENZA (PULSAZIONE) DI TAGLIO di un circuito la frequenza (pulsazione) in corrispondenza della quale il MODULO DEL GUADAGNO (nel caso di circuiti passivi il modulo dell'Attenuazione) assume il valore: $(1/\sqrt{2})$ *(il valore massimo).

Matematicamente si può scrivere:

$$\boxed{A(f_{\text{taglio}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{\text{max}}} \quad \text{eq. 10.3.3}$$

Il valore massimo nel nostro caso vale R_2/R_1 e di conseguenza si ha che la **PULSAZIONE DI TAGLIO** è:

$$|\overline{F}(j\omega_{\text{taglio}})| = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_{\text{taglio}}^2 R_2^2 C^2}} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1 + \omega_{\text{taglio}}^2 R_2^2 C^2 = 2 \Rightarrow \omega_{\text{taglio}}^2 R_2^2 C^2 = 1$$

$$\boxed{\omega_{\text{taglio}} = \frac{1}{R_2 C}} \quad \text{eq. 10.3.4}$$

LA PULSAZIONE DI TAGLIO COINCIDE CON LA PULSAZIONE DEL POLO DEL CIRCUITO.

La **FREQUENZA DI TAGLIO** è di conseguenza:

$$f_{\text{taglio}} = \frac{\omega_{\text{taglio}}}{2\pi} \Rightarrow f_{\text{taglio}} = \frac{1}{2\pi R_2 C} \quad \text{eq. 10.3.5}$$

Dalla (10.3.2) si ricava che:

⇒ PER $\omega=0$ IL GUADAGNO VALE R_2/R_1 (DEL RESTO RISPETTO ALLA CONTINUA IL CONDENSATORE SI COMPORTA COME UN CIRCUITO APERTO ED IL CIRCUITO SI TRASFORMA IN UN AMPLIFICATORE IN CONFIGURAZIONE INVERTENTE).

⇒ PER $\omega @ \infty$ IL GUADAGNO TENDE A 0 (DEL RESTO PER $\omega @ \infty$ LA REATTANZA CAPACITIVA TENDE A 0 ED IL CONDENSATORE TENDE A COMPORTARSI COME UN CORTOCIRCUITO, PORTANDO A MASSA VIRTUALE L'USCITA).

Dalla (10.3.1) si ricava la **FASE**.

Il segno - porta un contributo allo sfasamento di 180° per tutto il campo delle frequenze. Sovrapposto a tale contributo costante, dovuto al fatto che stiamo analizzando un circuito invertente, c'è il **contributo in Fase del POLO NON NELL'ORIGINE**. Tale contributo è dato da:

$$\boxed{f = \text{arctg}(-\omega R_2 C)} \quad \text{eq. 10.3.6}$$

Quindi il contributo in Fase in funzione della frequenza **DEL SOLO POLO NON NELL'ORIGINE** è dato dalla (10.3.6).

Da tale relazione si ricava che:

⇒ PER $\omega = 0$ LO SFASAMENTO f VALE 0° ;

⇒ PER $\omega @ \infty$ LO SFASAMENTO f TENDE A -90° ;

⇒ ALLA PULSAZIONE DI TAGLIO $\omega = 1/R_2 C$, CIOÈ IN CORRISPONDENZA DEL POLO, LO SFASAMENTO f VALE -45° .

Se, come nel circuito in esame, siamo in presenza di un circuito invertente, occorre aggiungere (o togliere) 180° per tutte le frequenze e quindi **per l'Integratore invertente reale:**

⇒ PER $\omega = 0$ LO SFASAMENTO f VALE 180° ;

⇒ PER $\omega \rightarrow \infty$ LO SFASAMENTO f TENDE A 90° ;

⇒ ALLA PULSAZIONE DI TAGLIO $\omega = 1/R_2C$, CIOÈ IN CORRISPONDENZA DEL POLO, LO SFASAMENTO f VALE 135° .

Vogliamo ora trovare i Diagrammi di Bode del circuito in esame.

Per questo facciamo il Logaritmo in base 10 di entrambi i membri della (10.3.2). Si ha:

$$\boxed{\text{Log}|F(j\omega)| = \text{Log} \frac{R_2}{R_1} + \text{Log} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}} = \text{Log} \frac{R_2}{R_1} - \text{Log} \sqrt{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}} \quad \text{eq. 10.3.7}$$

Quest'ultima equazione è composta di due addendi.

Il primo, $\text{Log} \frac{R_2}{R_1}$, è indipendente dalla frequenza e quindi nel piano $\text{Log}|F(j\omega)|/\text{Log} \omega$ è rappresentato da una retta parallela all'asse delle ascisse.

Il secondo, $-\text{Log}(\sqrt{1 + \omega^2 R_2^2 C^2})$, dipende invece dalla frequenza.

La (10.3.7) per:

$$\boxed{\omega R_2 C \ll 1 \Leftrightarrow \omega \ll \frac{1}{R_2 C}} \quad \text{eq. 10.3.8}$$

si riduce a:

$$\boxed{\text{Log}|F(j\omega)| \approx \text{Log} \frac{R_2}{R_1} - \text{Log} 1 = \text{Log} \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{eq. 10.3.9}$$

in pratica nel piano $\text{Log}|F(j\omega)|/\text{Log} \omega$ si riduce ad una retta parallela all'asse delle ascisse.

Mentre per:

$$\boxed{\omega R_2 C \gg 1 \Leftrightarrow \omega \gg \frac{1}{R_2 C}} \quad \text{eq. 10.3.10}$$

la (10.3.7) si riduce a:

$$\boxed{\text{Log}|F(j\omega)| \approx \text{Log} \frac{R_2}{R_1} - \text{Log}(\omega R_2 C) = \text{Log} \frac{R_2}{R_1} - \text{Log} \omega + \text{Log} \frac{1}{R_2 C} = -\text{Log} \omega + \text{Log} \frac{1}{R_1 C}} \quad \text{eq. 10.3.11}$$

Quest'ultima espressione nel piano $\text{Log}|F(j\omega)|/\text{Log} \omega$ è l'equazione di una retta, parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, che incontra l'asse delle ordinate per $|F(j\omega)| = 1/R_1 C$.

Quindi nel piano $\text{Log}|F(j\omega)|/\text{Log} \omega$ l'andamento di $|F(j\omega)|$ risulta dalla composizione di andamenti tutti rettilinei sia per ω molto minore della pulsazione del polo, sia per ω molto maggiore della pulsazione del polo.

In **Figura n. 44** sono riportati i Diagrammi di BODE per un Integratore invertente reale nel quale $R_1=1591\Omega$, $R_2=15910\Omega$, $C=10\text{nF}$ (i valori sono scelti per avere una frequenza di taglio di 1KHz).

DAL DIAGRAMMA DI BODE RELATIVO AL MODULO NOTIAMO CHE:

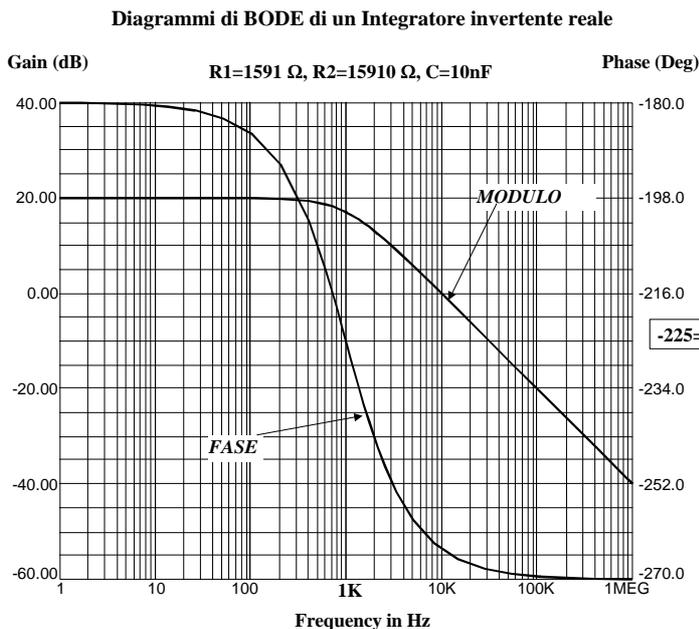


Figura n. 44

LINEARMENTE CON UNA PENDENZA DI -20DB PER DECADE: I SEGNALI SINUSOIDALI VENGONO SEMPRE PIÙ ATTENUATI QUANTO PIÙ LA LORO FREQUENZA È MAGGIORE DELLA FREQUENZA DI TAGLIO.

Per questo comportamento rispetto al segnale sinusoidale tale circuito è anche chiamato **FILTRO PASSA-BASSO attivo del primo ordine**.

DAL DIAGRAMMA DI BODE RELATIVO ALLA FASE NOTIAMO CHE:

- ⇒ LA FASE RIMANE SOSTANZIALMENTE UGUALE A **-180°** (CHE EQUIVALE A **+180°**) FINO A CIRCA **UNA DECADE PRIMA DELLA FREQUENZA DI TAGLIO**;
- ⇒ **TRA UNA DECADE PRIMA ED UNA DECADE DOPO LA FREQUENZA DI TAGLIO LA FASE PASSA DA -180° A -270° (DA +180° A +90°)**;
- ⇒ **ALLA FREQUENZA DI TAGLIO LA FASE VALE -225° = -180° - 45° (CHE EQUIVALE A +135°)**;
- ⇒ **DA UNA DECADE DOPO LA FREQUENZA DI TAGLIO LA FASE RESTA UGUALE A -270° (CHE EQUIVALE A +90°)**.

10.4 Risposta del circuito nel dominio del tempo ad un segnale qualsiasi.

Torniamo alla Funzione di trasferimento del circuito di **Figura n. 43**.

$$\boxed{\bar{F}(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + sR_2C}}$$
 eq. 10.4.1

Confrontando i Diagrammi di Bode in **Figura n.44** con quelli in **Figura n. 33** notiamo che da una decade dopo la frequenza del polo il nostro circuito ha gli stessi Diagrammi di Bode dell'Integratore Invertente ideale, con il Guadagno che scende di con una pendenza di -20dB per decade e la fase che vale -270° (equivalente a +90°).

In questo campo di frequenze, cioè per

$$\boxed{sR_2C \gg 1}$$
 eq. 10.4.2

La F.d.T. diventa:

$$\boxed{\bar{F}(s) = -\frac{1}{sR_1C}}$$
 eq. 10.4.3

che è del tutto analoga alla (8.1.1).

⇒ PER FREQUENZE FINO AD UNA DECADE PRIMA DELLA FREQUENZA DI TAGLIO IL GUADAGNO VALE R_2/R_1 (NEL CASO PARTICOLARE 10 CHE EQUIVALE A +20 DB); I SEGNALI SINUSOIDALI CHE CADONO IN QUEL CAMPO DI FREQUENZE VENGONO AMPLIFICATI (O ATTENUATI) DI TALE QUANTITÀ;

⇒ PER FREQUENZE OLTRE UNA DECADE DOPO LA FREQUENZA DI TAGLIO IL GUADAGNO DIMINUISCE

Quindi, **SOLO PER IL CAMPO DI FREQUENZE PER IL QUALE SI È RICAVATA LA (10.4.3)**, si ha:

$$v_{out}(t) = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t v_{in}(t) dt + K \quad \text{eq. 10.4.4}$$

Invece per

$$sR_2 C \ll 1 \quad \text{eq. 10.4.5}$$

La F.d.T. diventa:

$$\overline{F(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \quad \text{eq. 10.4.6}$$

Quindi, **SOLO PER IL CAMPO DI FREQUENZE PER IL QUALE SI È RICAVATA LA (10.4.6)**, si ha:

$$v_{out}(t) = -\frac{R_2}{R_1} v_{in}(t) \quad \text{eq. 10.4.7}$$

Il circuito si comporta come un **AMPLIFICATORE INVERTENTE** dalla continua fino ad una decade prima della pulsazione del polo: in questo campo di frequenze amplifica (o attenua) di $-R_2/R_1$ il segnale d'ingresso e l eventuale componente continua del segnale d'ingresso qualunque sia la sua frequenza.

Il circuito si comporta come un **INTEGRATORE INVERTENTE** la sola componente a valor medio nullo del segnale d'ingresso da una decade dopo la pulsazione del polo.

ESERCIZIO: Ad un Integratore invertente reale con $R_1=2660\Omega$, $R_2=33.9K\Omega$, $C=47nF$, è posta in ingresso un'onda quadra 5/-5, frequenza 10KHz e d.c. 50%. Calcolare la forma d'onda che si ottiene in uscita a regime.

SVOLGIMENTO

La pulsazione del polo è:

$$\omega_{polo} = \frac{1}{R_2 C} = 628.93 \text{ rad/sec}$$

che equivale ad una frequenza di circa 100Hz.

Poiché la frequenza del segnale d'ingresso cade oltre una decade dopo la frequenza del polo, siamo sicuri che in uscita troveremo un segnale triangolare, cioè l'integrale della componente a valor medio nullo dell'onda quadra posta in ingresso (nel caso particolare il valor medio è nullo).

Alla frequenza del segnale d'ingresso il legame nel tempo tra la tensione d'uscita e quella d'ingresso è dato dall'equazione (10.4.4). Nel primo semiperiodo ($v_{in}=5V$) abbiamo:

$$v_{out}'(t) = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t v_{in}'(t) dt + K' = -\frac{5}{R_1 C} t + K' \approx -40 \cdot 10^3 \cdot t + K'$$

Abbiamo trovato il coefficiente angolare del segnale d'uscita. Resta da trovare il valore della tensione d'uscita all'istante iniziale.

Poiché il segnale d'ingresso è a valor medio nullo, abbiamo che, a regime, anche il segnale d'uscita è a valor medio nullo. Quindi per trovare il valore dell'uscita all'istante iniziale basta trovare, sapendo il coefficiente angolare, l'escursione totale dell'uscita nel semiperiodo e dividere per due il valore trovato. Si ha:

$$K' = m \frac{T}{2} = 40 \cdot 10^3 \frac{100 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot 0.5 = 1V$$

Quindi il segnale d'uscita è un segnale triangolare 1/-1
La simulazione a Calcolatore, riportata in **Figura n. 45**, conferma quanto abbiamo trovato teoricamente.

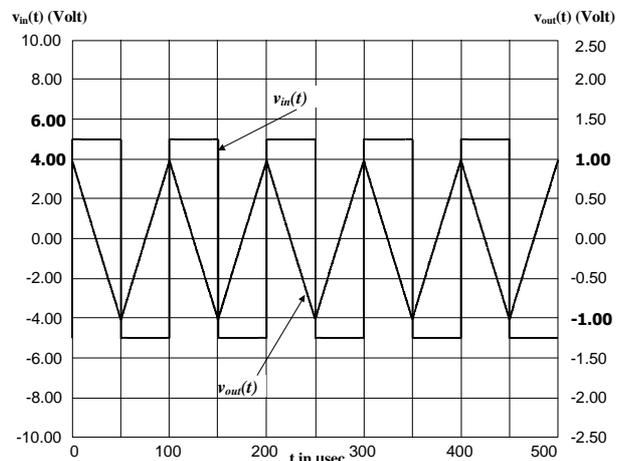


Figura n. 45

ESERCIZIO: Ad un Integratore invertente reale con $R_1=500\Omega$, $R_2=5K\Omega$, $C=47nF$, è posto in ingresso un'onda quadra 3/-2, frequenza 10KHz e d.c. 50%. Calcolare la forma d'onda che si ottiene in uscita a regime.

SVOLGIMENTO

La pulsazione del polo è:

$$\omega_{\text{polo}} = \frac{1}{R_2 C} = 4.26 \cdot 10^3 \text{ rad/sec}$$

che equivale ad una frequenza di 678Hz. Quindi la frequenza del segnale cade oltre una decade dopo la frequenza del polo e quindi siamo sicuri che la componente del segnale d'ingresso a valor medio nullo è integrata.

Occorre però considerare che, in questo caso, il segnale d'ingresso non è a valor medio nullo, ma presenta una componente continua pari a 0.5V. Tale componente continua non è integrata dall'Integratore invertente reale, ma è amplificata di $-R_2/R_1$ (nel nostro caso -10). Di conseguenza possiamo già affermare che in uscita avremo una componente continua pari a -5V.

Il segnale d'ingresso, depurato del suo valor medio, diviene un'onda quadra 2.5/-2.5V, frequenza 10 KHz e D.C. 50%.

L'equazione della tensione d'uscita nel primo semiperiodo vale:

$$v_{\text{out}}(t) = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t v_{\text{in}}(t) dt + K' = -\frac{2.5}{R_1 C} t + K' \approx -106.38 \cdot 10^3 \cdot t + K'$$

Con la stessa motivazione usata nell'esercizio precedente possiamo affermare che:

$$K' = m \frac{T}{2} \frac{1}{2} \approx 106.38 \cdot 10^3 \frac{100 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot 0.5 = 2.66V$$

Quindi la componente a valor medio nullo del segnale d'ingresso produce in uscita un segnale triangolare 2.66/-2.66 V. Tenendo conto della componente continua, in uscita abbiamo un segnale triangolare (2.66-5)/(-2.66-5)V, cioè un segnale -2.34/-7.66V.

Il risultato trovato teoricamente è confermato dalla simulazione a Calcolatore, riportata in **Figura n. 46**.

ESERCIZIO: Progettare un circuito tale che, se poniamo in ingresso un'onda quadra 4/-1, frequenza 1KHz e D.C. 25%, fornisca in uscita un segnale triangolare di ampiezza picco-picco pari ad 1V.

SVOLGIMENTO

Abbiamo bisogno di un Integratore e scegliamo quello invertente reale. Il segnale d'ingresso è a valor medio non nullo. Calcoliamo tale valor medio:

$$V_{\text{inmedio}} = \frac{1}{T} \left[V_H \frac{T}{n} + V_L \frac{n-1}{n} T \right] = \left[\frac{V_H}{n} + \frac{n-1}{n} V_L \right] = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} \cdot (-1) = +250mV$$

Il segnale d'ingresso, depurato della componente continua, diventa un'onda quadra che rimane al valore alto (3.75V) per 250μsec ed al valore basso (-1.25V) per 750μsec.

Poiché vogliamo in uscita un segnale triangolare a partire da un'onda quadra, dobbiamo essere sicuri che la pulsazione del polo cada almeno una decade prima della pulsazione del segnale d'ingresso, che in questo caso vale 6.28Krad/sec. Quindi:

$$\omega_{\text{polo}} = \frac{1}{R_2 C} \leq 628 \text{ rad/sec} = \frac{1}{10} \omega_{\text{segnale}} \Rightarrow R_2 C \geq 1.59m \text{ sec.}$$

Il problema richiede che il segnale triangolare d'uscita abbia un valore picco-picco di 1V.

Nel primo "semiperiodo" abbiamo:

$$v_{\text{out}}(t) = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t v_{\text{in}}(t) dt + K' = -\frac{3.75}{R_1 C} t + K'$$

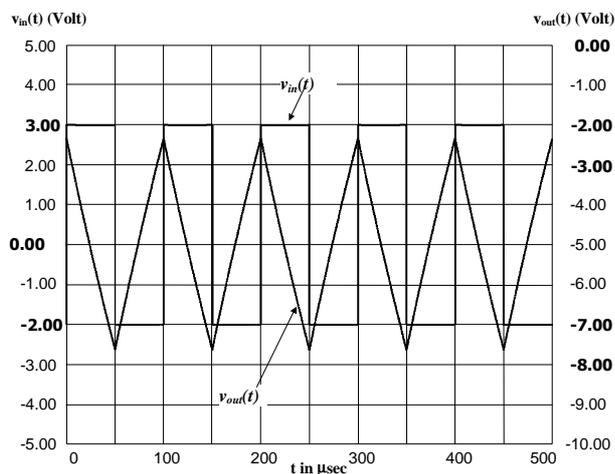


Figura n. 46

Il segnale d'uscita deve in ognuno dei semiperiodi avere una variazione di tensione di 1 V. Abbiamo quindi:

$$\Delta v_{out} = \frac{3.75}{R_1 C} 250 \cdot 10^{-6} = 1 \Rightarrow R_1 C = 937.5 \text{ msec}$$

Anche se non è richiesto dal problema, vogliamo stabilire già in fase di progetto anche il valor medio del segnale d'uscita. Supponiamo di volere in uscita una componente continua di -1V. Per fare questo dobbiamo amplificare la componente continua del segnale d'ingresso di 4 volte. Quindi abbiamo una terza condizione:

$$\frac{R_2}{R_1} = 4 \Rightarrow R_1 = \frac{R_2}{4}$$

Sostituendo quest'ultima relazione nella penultima si ha:

$$R_1 C = 937.5 \text{ msec} = \frac{R_2}{4} C \Rightarrow R_2 C = 3.75 \text{ msec}$$

Poiché la costante tempo trovata è maggiore di 1.59msec, e quindi la pulsazione del polo associato è tale che il segnale sia integrato, possiamo scegliere il valore di C e ricavare i valori delle Resistenze:

$$R_2 C = 3.75 \text{ msec}; C = 47 \text{ nF} \Rightarrow R_2 = 79.79 \text{ K}\Omega \Rightarrow R_1 = 19.95 \text{ K}\Omega$$

Con questi valori l'Integratore invertente reale, alimentato in ingresso con un'onda quadra 4/-1, frequenza

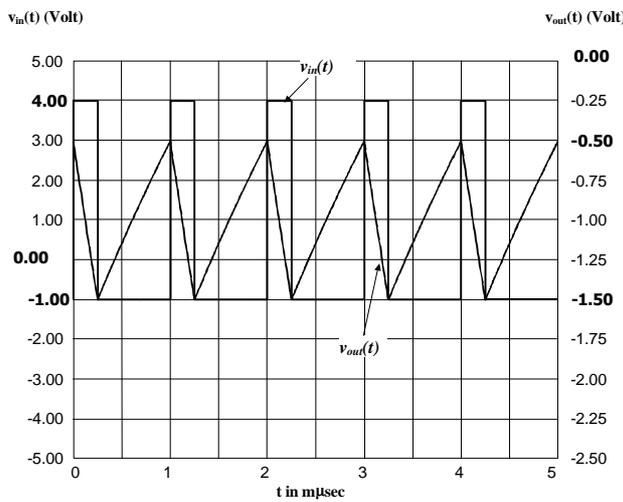


Figura n. 47

1KHz e D.C. 25%, deve fornire in uscita un segnale triangolare di valor medio -1V e valore picco-picco 1V, cioè un segnale triangolare che varia tra i valori di tensione -0.5V e -1.5V.

La simulazione a calcolatore riportata in **Figura n. 47**, conferma l'esattezza del nostro progetto.

10.5 Risposta alle variazioni brusche di tensione.

Abbiamo già ricavato (al **Paragrafo 5** come prima applicazione delle Trasformate di Laplace) l'equazione generale della risposta di un circuito R-C ad un gradino di tensione.

Poiché le considerazioni fatte allora erano ricavate a partire dalla F.d.T. del circuito, esse rimangono valide per tutti i circuiti che abbiano la stessa F.d.T. o comunque delle F.d.T. che differiscano da quella del circuito R-C, uscita su C, per un termine costante.

In particolare la risposta di tutti i circuiti del primo ordine (quelli che abbiano cioè solo un polo) al gradino di tensione è sempre del tipo:

$$v_{out}(t) = A + B e^{-(t/\tau)} \quad \text{eq. 10.5.1}$$

dove τ prende il nome di **COSTANTE TEMPO** del circuito ed è data dal prodotto (rapporto) tra la Capacità (Induttanza) e la Resistenza che si vede ai capi della Capacità (Induttanza).

Ricaviamo la risposta alle variazioni brusche, in particolare al gradino di tensione riportato in **Figura n. 48**, dell'Integratore invertente reale il cui schema circuitale riportiamo in **Figura 49**.

In questo caso $\tau = R_2 C$ giacché è R_2 la Resistenza che si vede ai capi della Capacità, come abbiamo già ricavato precedentemente.

Poniamo in ingresso il solito gradino di ampiezza V_0 e supponiamo il Condensatore inizialmente scarico.

Considerando che:

$$v_{out}(t) = -v_C(t)$$

si ha:

$v_{in}(t = 0^-) = 0$	$v_{in}(t = 0^+) = V_0$	$v_{in}(t \rightarrow \infty) = V_0$
$v_{out}(t = 0^-) = 0$	$v_{out}(t = 0^+) = 0$	$v_{out}(t \rightarrow \infty) = -(R_2/R_1)v_{in} = -(R_2/R_1)V_0$

Quindi:

$$v_{out}(t=0^+) = A + B e^{-(0/t)} = A + B = 0$$

$$v_{out}(t \rightarrow \infty) = A + B e^{-(t \rightarrow \infty/t)} = A = -(R_2/R_1)V_0$$

Dal sistema tra le due ultime equazioni si ricava:

$$A = -(R_2/R_1)V_0 \quad B = (R_2/R_1)V_0$$

Quindi, sostituendo i valori trovati di A e B nella (3.28), si ha che, nel caso in esame, l'equazione dell'andamento della v_{out} in funzione del tempo è il seguente:

$$v_{out}(t) = -\frac{R_2}{R_1}V_0 + \frac{R_2}{R_1}V_0 e^{-(t/\tau)} = -\frac{R_2}{R_1}V_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad eq. \quad 10.5.2$$

La simulazione a Calcolatore riprodotta in **Figura n. 50** e relativa ad un circuito con $R_1=50K\Omega$, $R_2=100K\Omega$, $C=50nF$, conferma l'andamento trovato teoricamente ed espresso nell'equazione (10.5.2).

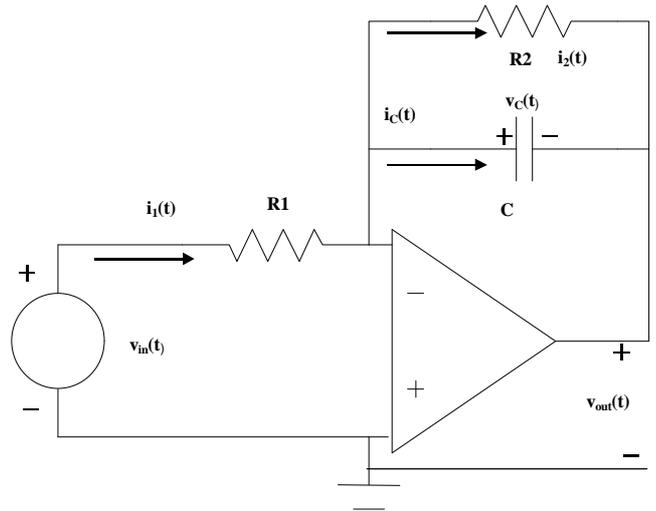


Figura n. 49

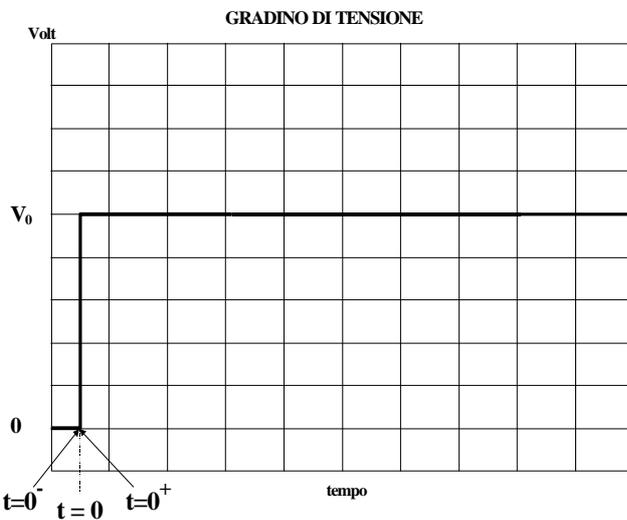


Figura n. 48

Supponiamo ora che, trascorso un tempo pari a T_0 dall'istante della prima commutazione, il gradino torni al valore zero. Nel caso riportato in **Figura n. 51** il gradino torna a zero dopo 5msec, cioè dopo che è passato un tempo pari a 1τ dall'istante nel quale era avvenuta la prima commutazione. Per trovare la nuova equazione dell'andamento di $v_{out}(t)$ dobbiamo per prima cosa trovare il valore che la tensione d'uscita aveva raggiunto nell'istante immediatamente precedente la nuova commutazione. Utilizzando l'equazione (10.5.2), si trova:

$$v_{out}(t = T_0) = -[(R_2/R_1)V_0] \cdot [1 - e^{-(T_0/\tau)}]$$

Nel caso particolare che stiamo considerando abbiamo $V_0=5V$, $T_0=5msec$, $\tau=5msec$, quindi:

$$v_{out}(5msec) = -\frac{100K\Omega}{50K\Omega} \cdot 5 \cdot [1 - e^{-(5msec/5msec)}] = -6.32V$$

Per semplificare la forma delle equazioni che dobbiamo

trovare, riposizioniamo l'origine dell'asse dei tempi nell'istante della nuova commutazione.

Chiamiamo V_{out0} il valore raggiunto dalla tensione d'uscita all'istante 0^- della nuova commutazione.

I valori delle tensioni nel nuovo istante 0^+ si trovano ricordando che istantaneamente il Condensatore si comporta come un generatore ideale di tensione, giacché è ora inizialmente carico, mentre nel lungo periodo tende a comportarsi come un circuito aperto.

Abbiamo:

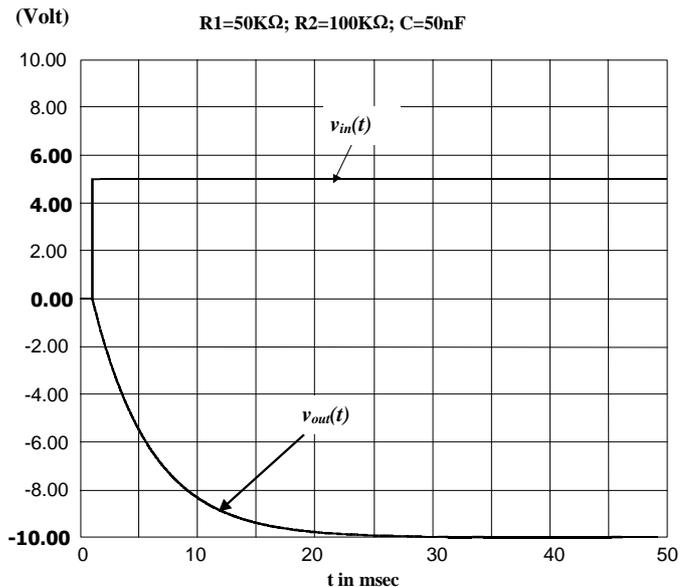


Figura n. 50

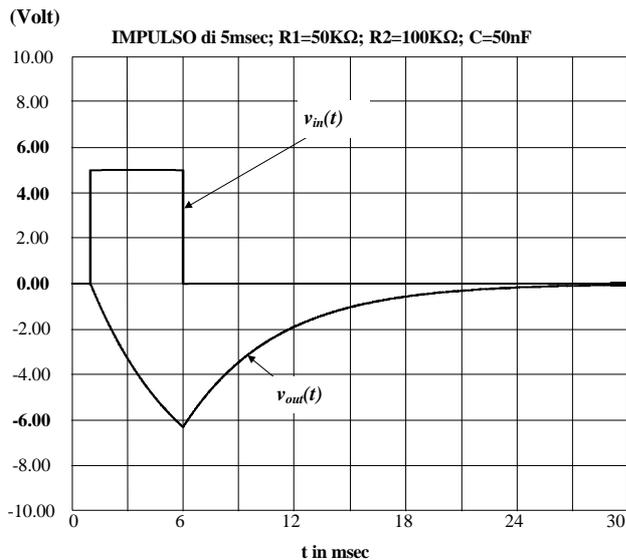


Figura n. 51

$v_{in}(t=0^-) = V_0$	$v_{in}(t=0^+) = 0$	$v_{in}(t \rightarrow \infty) = 0$
$v_{out}(t=0^-) = V_{out0}$	$v_{out}(t=0^+) = V_{out0}$	$v_{out}(t \rightarrow \infty) = -(R_2/R_1)v_{in} = 0$

Da tali relazioni si ricavano le nuove costanti A e B.

$$v_{out}(t=0^+) = A' + B' e^{-0/t} = A' + B' = V_{out0}$$

$$v_{out}(t \rightarrow \infty) = A' + B' e^{-(t \rightarrow \infty)/t} = A' = 0$$

Dal sistema tra le due ultime equazioni si ricava:

$$A' = 0 \quad B' = V_{out0}$$

Quindi, sostituendo i valori trovati di A' e B' nella (10.5.1), si ha che, nel caso in esame, l'equazione dell'andamento della v_{out} in funzione del tempo è il seguente:

$$v_{out}(t) = V_{out0} \cdot e^{-(t/\tau)} \quad \text{eq. 10.5.3}$$

Ricordiamo di aver già trovato che, nell'esempio numerico che abbiamo fatto, la V_{out0} vale **-6.32V**.

I risultati della simulazione a Calcolatore riportati in **Figura n. 51**, concordano con quanto trovato teoricamente.

10.6 Contributo di un polo non nell'origine.

Quanto ricavato per il particolare circuito in esame (l'Integratore invertente reale) ha una valenza generale nel senso che un polo non nell'origine porta un contributo sui Diagrammi di Bode di un qualsiasi circuito, anche che abbia più poli e più zeri, come quello riportato in **Figura n. 44**.

CIOÈ, PER IL DIAGRAMMA DI BODE RELATIVO AL MODULO E LINEARIZZANDO LE CURVE, ESSO:

- ⇒ RIMANE COSTANTE FINO ALLA FREQUENZA DEL POLO;
- ⇒ PER FREQUENZE MAGGIORI DI QUELLE DEL POLO DIMINUISCE LINEARMENTE CON UNA PENDENZA DI **-20DB** PER DECADE (-6DB PER OTTAVA).

PER IL DIAGRAMMA DI BODE RELATIVO ALLA FASE, E LINEARIZZANDO LE CURVE, ESSO:

- ⇒ RIMANE UGUALE A **0°** FINO AD UNA DECADE PRIMA DELLA FREQUENZA DEL POLO;
- ⇒ **TRA UNA DECADE PRIMA ED UNA DECADE DOPO** LA FREQUENZA DEL POLO LA FASE PASSA DA **0°** A **-90°** ;
- ⇒ **ALLA FREQUENZA DEL POLO** LA FASE VALE **-45°**;
- ⇒ **DA UNA DECADE DOPO** LA FREQUENZA DEL POLO LA FASE RESTA UGUALE A **-90°**.

L'effetto concreto dipenderà in questo caso dai poli e dagli zeri di frequenza inferiore a quella dello specifico polo in esame. Vedremo in seguito il significato concreto di quanto affermato.