ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE STATALE

«G. Marconi» - Pontedera

☎ 0587 53566/55390 - Fax: 0587 57411 - ✉: iti@marconipontedera.it - Sito WEB: www.marconipontedera.it

ANNO SCOLASTICO 2005/2006

APPUNTI DI ELETTRONICA

(Prof. Pierluigi D'Amico)

Condensatore, Induttanza, Circuiti R-C, Trasformata di Laplace

Indice

1. Funzionamento del Condensatore.

In un Condensatore il legame tra la tensione applicata ai suoi capi $v_C(t)$ e la corrente che lo attraversa $i_C(t)$ è dato dalla relazione:

$$\boxed{i_C(t) = C\left[\frac{dv_C(t)}{dt}\right]} \qquad \textbf{(1.1)}$$

dove C è il valore della Capacità.
Il termine tra parentesi quadra è la **Derivata** della tensione rispetto al tempo. Il valore della Derivata di una funzione in un suo punto non è altro che il coefficiente angolare della retta tangente, in quel punto, alla funzione. Per una funzione sempre crescente, tanto maggiore è il valore della derivata, tanto maggiore è il coefficiente angolare della retta tangente e quindi tanto più vicino a 90º è l'angolo che tale retta forma con il verso crescente dell'asse delle ascisse.
Se la funzione è costante per ogni valore della x, la sua derivata rispetto a x è nulla poiché nullo è l'angolo che la retta tangente alla funzione in un qualsiasi punto forma con il verso crescente dell'asse delle ascisse.
Se la funzione è una retta (y=mx+q), la sua derivata rispetto a x è uguale ad m, poiché è m il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in un qualsiasi punto.
Se la variabile indipendente è il tempo e la nostra funzione è la $v_C(t)$, la relazione (1.1) ci dice che la corrente nel condensatore è proporzionale non al valore della tensione applicata ai suoi capi ma alla "velocità" di variazione di tale tensione.
In altre parole:

Il condensatore conduce solo se c'è una variazione della tensione applicata ai suoi capi e la corrente che circola è tanto più grande quanto maggiore è la "velocità" di tale variazione.

1.1 Risposta del Condensatore alla continua.

Se applichiamo ai capi del Condensatore una tensione costante, cioè una continua, nel Condensatore circolerà una corrente nulla.

Rispetto alla continua, il rapporto tra la tensione applicata e la corrente che circola è uguale ad infinito e quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto.

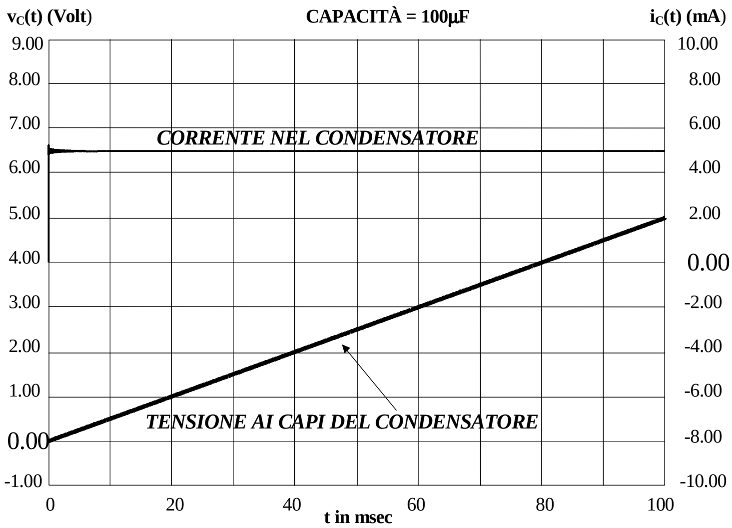

Figura n. 1

1.2 Risposta del Condensatore ad una rampa di tensione.

Per fare circolare in un Condensatore una corrente costante occorre applicare ai suoi capi una tensione con una "velocità" di variazione costante; cioè una rampa.
La **Figura n. 1**, riportata a fianco, è ottenuta simulando con µCAP3 la risposta in corrente di un condensatore di 100µF, ai cui capi è applicata una rampa di tensione che va da 0V a 5V in 100msec.
Si vede che la corrente è costante.

ESERCIZIO: verificare dalla Figura n. 1 che la corrente è uguale al valore della capacità moltiplicato per il coefficiente angolare della rampa.

1.3 Risposta del Condensatore alle variazioni brusche di tensione.

Se invece applichiamo ai capi del condensatore una variazione brusca di tensione, come ad esempio un gradino, poiché abbiamo una variazione finita di tensione in un intervallo di tempo nullo, nell'istante della commutazione la corrente tende ad infinito.

Rispetto alle variazioni brusche di tensione, il rapporto tra la tensione applicata e la corrente che circola è uguale a zero e quindi, nell'istante della commutazione, il condensatore si comporta come un corto circuito, se inizialmente scarico, e più in generale come un generatore ideale di tensione del valore pari alla tensione presente sul condensatore nell'istante della commutazione.

1.4 Risposta del Condensatore al segnale sinusoidale.

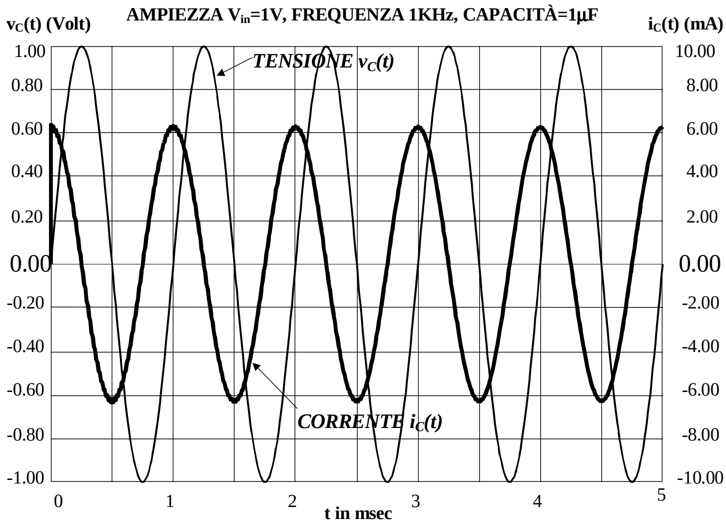

Figura n. 2

Applichiamo ora ai capi del Condensatore una tensione sinusoidale.
La relazione (1.1) ci dice che la corrente è massima quando è massima la velocità di variazione della tensione (cioè quando è massimo il coefficiente angolare della retta tangente al segnale sinusoidale), mentre è nulla quanto la velocità di variazione è nulla (cioè quando la retta tangente è parallela all'asse dei tempi).
La corrente è quindi:

- ⇒ **massima positiva per $\omega t=0+2n\pi$**
- ⇒ **massima in valore assoluto ma negativa per $\omega t=(2n+1)\pi$**
- ⇒ **nulla per $\omega t=[(2n+1)/2]\pi$**

Quindi:

l'i_C (t) è sfasata di $\pi/2$ in anticipo rispetto alla v_C(t).

La simulazione con μCAP3, riportata in **Figura n. 2** e realizzata utilizzando un condensatore di 1μF ai cui capi è stato posto un segnale sinusoidale d'ampiezza 1V e frequenza 1KHz, conferma quanto affermato.
Abbiamo successivamente posto ai capi dello stesso condensatore un segnale sinusoidale sempre d'ampiezza 1V ma di frequenza pari a 10KHz, ottenendo le forme d'onda riportate in **Figura n. 3**.

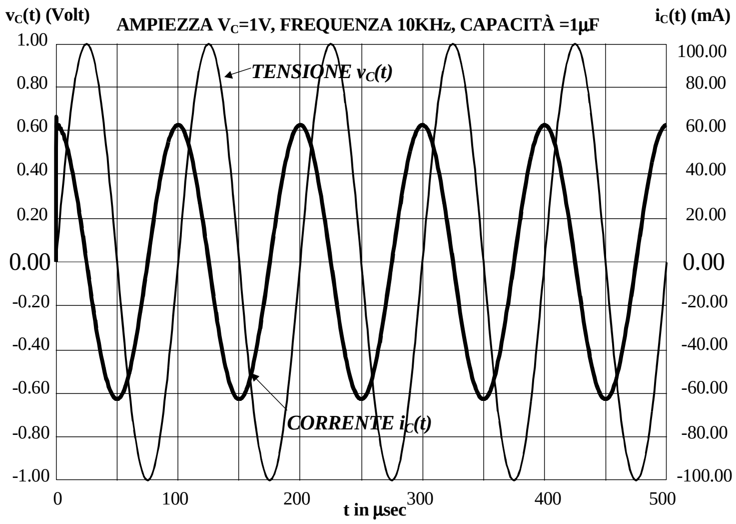

Figura n. 3

Si nota che lo sfasamento tra tensione e corrente è rimasto invariato ma l'ampiezza della corrente è 10 volte quella che si otteneva con il segnale di frequenza 1KHz.
Possiamo concludere che:

L'ampiezza della corrente è proporzionale alla frequenza della tensione sinusoidale applicata ai capi del condensatore.

Abbiamo infine posto ai capi del solito condensatore un segnale sinusoidale d'ampiezza 2V e frequenza pari a 1KHz, ottenendo le forme d'onda riportate in **Figura n. 4.**

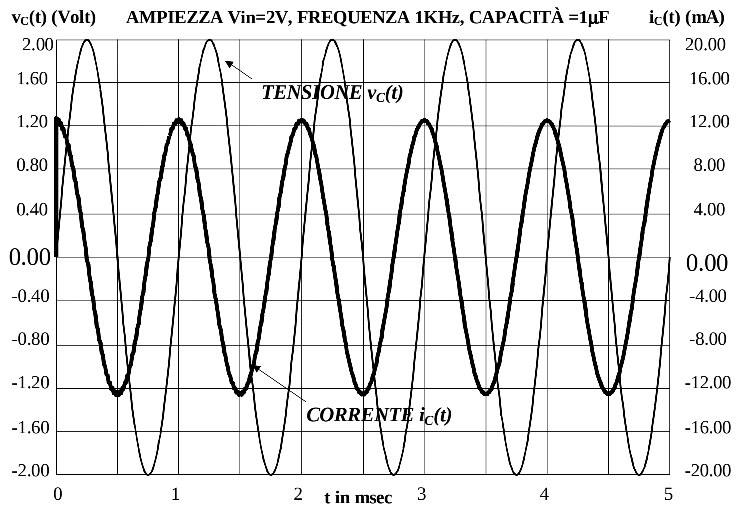

Figura n. 4

Si nota che lo sfasamento tra tensione e corrente è rimasto ancora invariato ma l'ampiezza della corrente è 2 volte quella che si otteneva con il segnale di frequenza 1KHz ed ampiezza 1V.
Possiamo concludere che

L'ampiezza della corrente è proporzionale all'ampiezza della tensione sinusoidale applicata ai capi del condensatore.

ESERCIZIO: verificare dalle Figure nn. 2, 3 e 4 che l'ampiezza della corrente è uguale al prodotto tra l'ampiezza della tensione A, la pulsazione del segnale ω ed il valore della capacità C.

Quanto verificato nell'Esercizio è quanto si ricava matematicamente dalla (1.1).
Infatti, se applichiamo ai capi del condensatore una tensione:

$$\mathbf{v_C(t) = A \ \sin(\omega t + \phi)}$$

L'i_C(t) viene:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\,A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

Il rapporto tra l'ampiezza A del segnale sinusoidale di tensione applicato e l'ampiezza CAω del segnale sinusoidale di corrente che circola nel condensatore, prende il nome di **REATTANZA CAPACITIVA**, che si è soliti indicare con X_c:

$$\boxed{X_C = \frac{A}{CA\omega} = \frac{1}{\omega C}} \quad \textbf{(1.2)}$$

Volendo scrivere un'unica relazione che descriva completamente, cioè sia in termini d'ampiezza sia di sfasamento, il legame tra la tensione sinusoidale applicata ai capi del condensatore e la corrente che circola, dobbiamo introdurre la notazione vettoriale e scrivere:

$$\overline{V} = \overline{Z}_C * \overline{I}$$

Dove $\mathbf{Z_C}$ prende il nome di **IMPEDENZA DEL CONDENSATORE** e vale:

$$\boxed{\overline{Z_C} = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C} \quad \textbf{(1.3)}$$

2. Funzionamento dell'induttanza

In un'Induttanza il legame tra la corrente che la attraversa i_L (t) e la tensione ai suoi capi v_L(t) è dato dalla relazione:

$$\boxed{v_L(t) = L\left[\frac{di_L(t)}{dt}\right]} \quad \textbf{(2.1)}$$

dove L è il valore dell'Induttanza.

La relazione (2.1) e del tutto analoga alla (1.1) relativa al Condensatore; l'unica differenza consiste nello scambiare i ruoli tra tensione e corrente nel passare da una relazione all'altra.

È per questa ragione che Capacità ed Induttanza sono dette **duali** nei riguardi di corrente e tensione. Tutti i ragionamenti fatti per il Condensatore sono validi anche per l'Induttanza, purché si tenga conto di tale dualità.
Quindi la relazione (2.1) ci dice che la tensione ai capi di un'Induttanza è proporzionale non al valore della corrente che vi circola ma alla "velocità" di variazione di tale corrente.
In altre parole:

la d.d.p. ai capi di un'Induttanza è diversa da zero solo se c'è una variazione della corrente che l'attraversa e tale d.d.p. è, in valore assoluto, tanto più grande quanto maggiore è la "velocità" di tale variazione.

2.1 Risposta dell'Induttanza alla continua.

Se facciamo circolare in un'Induttanza una corrente costante, vale a dire una continua, la tensione ai suoi capi sarà nulla.

Rispetto alla continua, il rapporto tra la tensione ai capi dell'Induttanza e la corrente che circola è uguale a zero e quindi l'Induttanza si comporta come un corto circuito.

2.2 Risposta dell'Induttanza alle variazioni brusche di corrente.

Se invece facciamo circolare in un'Induttanza una corrente che abbia una variazione brusca, come ad esempio un gradino, poiché abbiamo una variazione finita di corrente in un intervallo di tempo nullo, nell'istante della commutazione la tensione tende ad infinito.

Rispetto alle variazioni brusche di corrente, il rapporto tra la tensione ai capi dell'Induttanza e la corrente che circola tende ad infinito e quindi, nell'istante della commutazione, l'Induttanza si comporta come un circuito aperto se inizialmente non percorsa da corrente e più in generale come un generatore ideale di corrente del valore pari alla corrente che circola nell'Induttanza nell'istante della commutazione.

2.3 Risposta dell'induttanza alle variazioni lineari di corrente.

Tornando al concetto di dualità tra Capacità ed Induttanza nei riguardi di corrente e tensione, si osservino le Figure n. 5 e 6.
La **Figura n. 5** riproduce la simulazione a Calcolatore dell'andamento della corrente in un Condensatore del valore di 220nF quando è posta ai suoi capi una tensione d'andamento che possiamo chiamare trapezoidale.

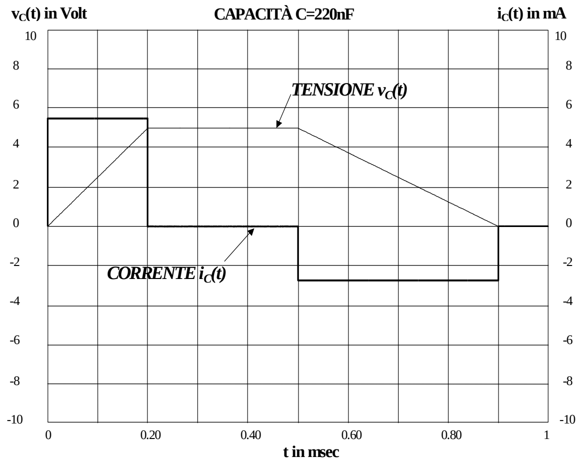

Figura n. 5

La **Figura n. 6** riproduce la simulazione a Calcolatore dell'andamento della tensione ai capi di un'Induttanza del valore di 220mH nella quale è fatta circolare una corrente che ha un andamento nel tempo del tutto analogo a quello della tensione posta ai capi del Condensatore nella prima simulazione.

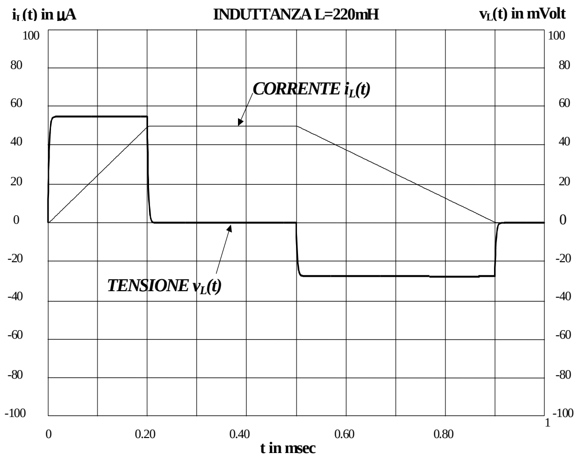

Figura n. 6

Dalle Figure in questione si possono ricavare sia conferme qualitative sul comportamento di Capacità ed Induttanza sia conferme quantitative delle relazioni (1.1) e (2.1).

ESERCIZIO: ricavare direttamente dalle Figure nn. 5 e 6 il valore che assume in ogni tratto la corrente nel Condensatore e la tensione ai capi dell'Induttanza. (Suggerimento: ricavare il coefficiente angolare dei vari tratti e moltiplicarlo per il valore della Capacità o dell'Induttanza.

2.4 Risposta dell'Induttanza al segnale sinusoidale.

Per dualità possiamo dedurre il comportamento dell'**Induttanza** rispetto al segnale sinusoidale, ed affermare:

La $v_L(t)$ è sfasata di $\pi/2$ in anticipo rispetto alla $i_L(t)$, che equivale a dire che la corrente nell'Induttanza è sfasata di $\pi/2$ in ritardo rispetto alla tensione.

Dimostriamo matematicamente quanto affermato, facendo circolare in un'Induttanza L la corrente:

$$\mathbf{i_L(t) = A\ \sin(\omega t + \phi)}$$

La $v_L(t)$ viene:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = LA\omega\cos s(\omega t + \phi)$$

Il rapporto tra l'ampiezza LAω del segnale sinusoidale di tensione e l'ampiezza A del segnale sinusoidale di corrente applicato, prende il nome di **REATTANZA INDUTTIVA**, che si è soliti indicare con X_L:

$$\boxed{X_L = \frac{LA\omega}{A} = \omega L} \quad \textbf{(2.2)}$$

Volendo scrivere un'unica relazione che descriva completamente, cioè sia in termini d'ampiezza sia di sfasamento, il legame tra la tensione sinusoidale ai capi dell'Induttanza e la corrente che vi circola, dobbiamo introdurre la notazione vettoriale e scrivere:

$$\overline{V} = \overline{Z_L}\,\overline{I}$$

dove $\mathbf{Z_L}$ prende il nome di **IMPEDENZA DELL'INDUTTANZA** e vale:

$$\boxed{\overline{Z_L} = j\omega L = jX_L} \quad \textbf{(2.3)}$$

3. Risposta dei Circuiti R-C al Segnale Sinusoidale al variare della frequenza

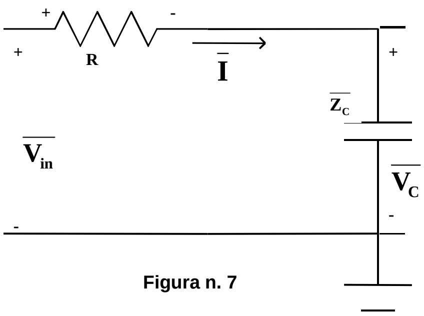

Figura n. 7

Sia dato il circuito R-C in **Figura n. 7** al quale è posta in ingresso **una tensione sinusoidale** di pulsazione ω.
Essendo in presenza di grandezze sinusoidali usiamo la **rappresentazione vettoriale** delle stesse.
Vogliamo trovare come varia l'ampiezza e la fase del **segnale sinusoidale** sul Condensatore e sulla Resistenza al variare della pulsazione (e quindi della frequenza) del **segnale sinusoidale** d'ingresso.

3.1 Uscita sul Condensatore.

Definiamo **ATTENUAZIONE sul Condensatore** il **vettore** dato dal rapporto tra il **vettore** Tensione sul Condensatore ed il **vettore** Tensione d'ingresso.

$$\overline{A_C} = \frac{\overline{V_C}}{\overline{V_{in}}}$$

Dall'equazione della maglia si ha:

$$\overline{V_{in}} = R\overline{I} + \overline{I}\,\overline{Z_C}$$

da cui si ricava:

$$\overline{I} = \frac{\overline{V_{in}}}{R + \overline{Z_C}}$$

$$\overline{V_C} = \overline{I}\,\overline{Z_C} = \overline{Z_C}\frac{\overline{V_{in}}}{R + \overline{Z_C}}$$

e quindi:

$$\overline{\mathbf{A}_C} = \frac{\overline{\mathbf{V}_C}}{\overline{\mathbf{V}_{in}}} = \frac{\overline{\mathbf{Z}_C}}{\mathbf{R} + \overline{\mathbf{Z}_C}} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

sostituendo alla (3.1.1) la (1.3), si ha:

$$\boxed{\overline{\mathbf{A}_C} = \frac{\left(\frac{1}{\mathbf{j}\omega\mathbf{C}}\right)}{\left(\mathbf{R} + \frac{1}{\mathbf{j}\omega\mathbf{C}}\right)} = \frac{1}{\mathbf{Rj}\omega\mathbf{C} + 1} = \frac{1 - \mathbf{j}\omega\mathbf{RC}}{1 + \omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2}} \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

Il vettore $\overline{\mathbf{A}_C}$ ha modulo $\mathbf{A}_C$ e fase ϕ_C.

Il modulo vale:

$$\boxed{\mathbf{A}_C = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2}}} \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

La fase è:

$$\boxed{\phi_C = \mathbf{arctg}\left(-\omega\mathbf{RC}\right)} \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

3.1.1 Il modulo dell'Attenuazione $\mathbf{A}_C$

Dalla (3.1.3) si ricava che:

- ⇒ IL MODULO DELL'ATTENUAZIONE $\mathbf{A}_C$ VALE 1 PER $\omega = 0$. RISPETTO ALLA CONTINUA IL CONDENSATORE SI COMPORTA COME UN CIRCUITO APERTO E TUTTA LA TENSIONE D'INGRESSO SI RITROVA AI SUOI CAPI.

- ⇒ IL MODULO DELL'ATTENUAZIONE $\mathbf{A}_C$ TENDE A 0 PER $\omega \rightarrow \infty$. LA REATTANZA CAPACITIVA PER $\omega \rightarrow \infty$ TENDE A 0 ED IL CONDENSATORE TENDE A COMPORTARSI COME UN CORTO CIRCUITO.

Si definisce FREQUENZA (PULSAZIONE) DI TAGLIO di un circuito la frequenza (pulsazione) in corrispondenza della quale il modulo del GUADAGNO (nel caso di circuiti passivi il modulo dell'ATTENUAZIONE) assume il valore: $\frac{1}{\sqrt{2}} \bullet (\mathbf{il \cdot valore \cdot massimo})$.

Matematicamente si può scrivere:

$$\boxed{\mathbf{A}\left(\mathbf{f}_{taglio}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{A}_{max}} \qquad \textbf{(3.1.5)}$$

Il valore massimo nel nostro caso vale 1 e di conseguenza si ha che la **PULSAZIONE DI TAGLIO** è:

$$\mathbf{A}_C\left(\omega_{taglio}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_{taglio}{}^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + \omega_{taglio}{}^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2 = 2 \Rightarrow \omega_{taglio}{}^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2 = 1 \Rightarrow \omega_{taglio} = \frac{1}{\mathbf{RC}}$$

La **FREQUENZA DI TAGLIO** è di conseguenza:

$$\boxed{\mathbf{f}_{taglio} = \frac{\omega_{taglio}}{2\pi} \Rightarrow \mathbf{f}_{taglio} = \frac{1}{2\pi\mathbf{RC}}} \qquad \textbf{(3.1.6)}$$

3.1.2 Lo sfasamento ϕ_C

Dalla (3.1.4) si ricava che:

- ⇒ LO SFASAMENTO ϕ_C VALE 0° PER $\omega = 0$.

⇒ LO SFASAMENTO ϕ_C TENDE A **-90°** PER $\omega \rightarrow \infty$.

⇒ ALLA FREQUENZA DI TAGLIO ϕ_C VALE **-45°.**

3.1.3 Grafici di A_C e ϕ_C

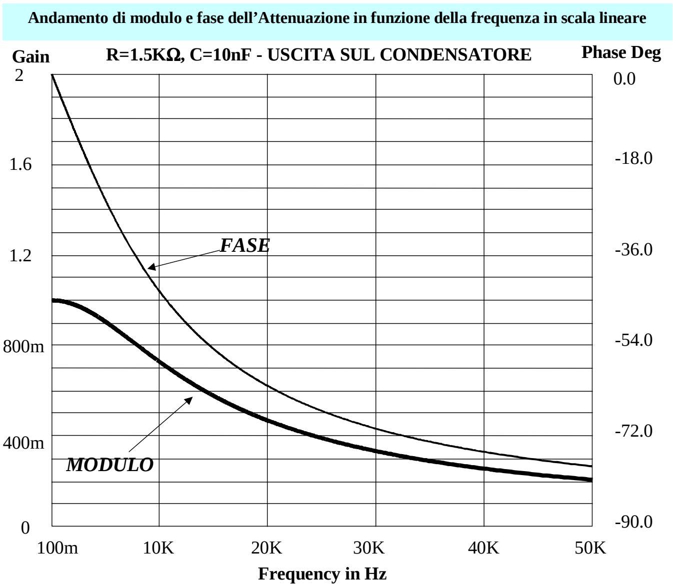

Figura n. 8

Nella **Figura n. 8** è riportato l'andamento dell'Attenuazione A_C e dello sfasamento ϕ_C .in funzione della frequenza in **scala lineare**.
Si vede che, pur avendo limitato il valore massimo della frequenza a 50KHz, il grafico appare poco "leggibile" in particolare per i valori più bassi della frequenza.
Per rendere tali grafici più "leggibili", (ma non solo per questo), essi sono tracciati utilizzando la **scala logaritmica** per A_C e semi logaritmica per ϕ_C .
Eseguendo il logaritmo in base 10 di entrambi i membri della relazione (3.3) si ha:

$$\mathbf{Log}(\mathbf{A_C}) = \mathbf{Log}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2}} = \mathbf{Log}1 - \mathbf{Log}\left(\sqrt{1+\omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2}\right) = -\mathbf{Log}\left(\sqrt{1+\omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2}\right)$$

Quest'ultima relazione per

$$\boxed{\omega\mathbf{RC} << 1 \Leftrightarrow \omega << \frac{1}{\mathbf{RC}}}$$

cioè **per pulsazioni molto minori della pulsazione di taglio**, si riduce a:

$$\boxed{\mathbf{Log}(\mathbf{A_C}) \approx -\mathbf{Log}\left(\sqrt{1}\right) = 0}$$

Mentre per:

$$\boxed{\omega\mathbf{RC} >> 1 \Leftrightarrow \omega >> \frac{1}{\mathbf{RC}}}$$

cioè **per pulsazioni molto maggiori della pulsazione di taglio**, si ha:

$$\boxed{\mathbf{Log}(\mathbf{A_C}) \approx -\mathbf{Log}(\omega\mathbf{RC}) = -\mathbf{Log}\,\omega + \mathbf{Log}\frac{1}{\mathbf{RC}}}$$

Quest'ultima espressione nel piano **Log** A_C **- Log** ω non è altro che l'equazione di una retta, parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, che incontra l'asse delle ordinate**(Log ω=0 ⇔ ω=1rad/sec⇒f=159.15mHz)** per $\mathbf{A_C} = \frac{1}{\omega\mathbf{RC}} = \frac{1}{\mathbf{RC}}$.

Quindi nel piano Log A_C - Log ω, cioè in scala logaritmica, l'andamento di A_C è rettilineo sia per ω molto minore della pulsazione di taglio, sia per ω molto maggiore della pulsazione di taglio.

È questo l'altro motivo, il principale, per il quale si usa tale tipo di scala per rappresentare l'andamento di A_C al variare della frequenza.
Riportiamo in **Figura n. 9** il risultato fornito in scala logaritmica della simulazione a Calcolatore.

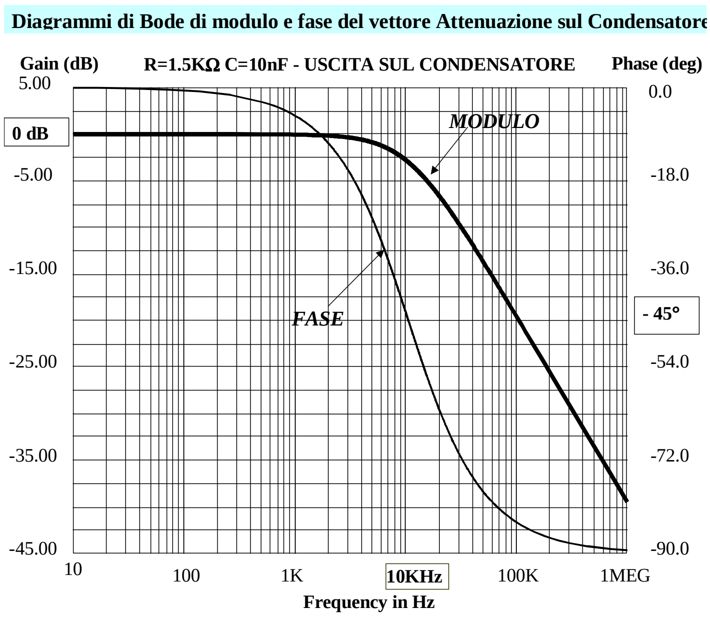

Figura n. 9

Tali grafici prendono il nome di DIAGRAMMI DI BODE.

Come si può notare il modulo dell'Attenuazione (Gain nella simulazione) è riportato in dB.

Ricordiamo che:

$$\mathbf{A_C(dB) = 20 Log A_C}$$

Alla frequenza (pulsazione) di taglio corrisponde un'attenuazione di:

$$\mathbf{A_C(f_{taglio})(dB)} = 20\mathbf{Log}\frac{1}{\sqrt{2}} = 20\mathbf{Log}0.707 = -3\mathbf{dB}$$

Quindi la frequenza di taglio può essere anche definita come la frequenza in corrispondenza della quale il Guadagno o l'Attenuazione diminuisce di 3dB rispetto al valore massimo.

Nel caso riportato nel diagramma essa vale 10KHz.

Dal Diagramma di Bode relativo al modulo notiamo che:

⇒ PER FREQUENZE INFERIORI ALLA FREQUENZA DI TAGLIO IL MODULO DELL'ATTENUAZIONE E' UNITARIO: I SEGNALI SINUSOIDALI D'INGRESSO CHE CADONO IN QUEL CAMPO DI FREQUENZE NON SONO ATTENUATI E SI RITROVANO IN USCITA CON UGUALE AMPIEZZA.

⇒ PER FREQUENZE SUPERIORI ALLA FREQUENZA DI TAGLIO IL MODULO DELL'ATTENUAZIONE DIMINUISCE LINEARMENTE CON UNA PENDENZA DI -20DB PER DECADE: I SEGNALI SINUSOIDALI D'INGRESSO VENGONO SEMPRE PIÙ ATTENUATI QUANTO PIÙ LA LORO FREQUENZA E' MAGGIORE DELLA FREQUENZA DI TAGLIO.

Per questo comportamento rispetto al <u>segnale sinusoidale</u> tale circuito è chiamato FILTRO PASSA-BASSO.

Dal diagramma di Bode relativo alla fase notiamo che:

- $\Rightarrow$ LA FASE RIMANE SOSTANZIALMENTE **NULLA** FINO A CIRCA UNA DECADE PRIMA DELLA FREQUENZA DI TAGLIO;
- $\Rightarrow$ TRA UNA DECADE PRIMA ED UNA DECADE DOPO LA FREQUENZA DI TAGLIO LA FASE PASSA DA **0°** A **-90°;**
- $\Rightarrow$ ALLA FREQUENZA DI TAGLIO LA FASE VALE **-45°;**
- $\Rightarrow$ DA UNA DECADE DOPO LA FREQUENZA DI TAGLIO LA FASE RESTA UGUALE A **-90°;**

I Diagrammi di Bode sono solitamente tracciati linearizzando le curve sopra riportate.

ESERCIZIO: Progettare un Filtro R-C PASSA-BASSO che alla frequenza di 7KHz produca un'attenuazione di -6dB. Trovare la frequenza di taglio del circuito. Trovare inoltre l'ampiezza, la fase ed il valor medio del segnale sinusoidale sul Condensatore se poniamo in ingresso un segnale sinusoidale di ampiezza 2V, frequenza 10KHz e valor medio 1V. Ripetere il punto precedente per un segnale sinusoidale di ampiezza 3V, frequenza 10Hz e valor medio -1V. Trovare infine per differenza l'ampiezza, la fase ed il valor medio del segnale sinusoidale sulla Resistenza per entrambi i segnali sinusoidali d'ingresso.

3.2 Uscita sulla Resistenza

Definiamo **ATTENUAZIONE sulla Resistenza** il **vettore** dato dal rapporto tra il **vettore** Tensione sulla Resistenza ed il **vettore** Tensione d'ingresso.

$$\overline{\mathbf{A_r}} = \frac{\overline{\mathbf{V_R}}}{\overline{\mathbf{V_{in}}}}$$

Dall'equazione della maglia si ha:

$$\overline{\mathbf{V_{in}}} = \mathbf{R}\overline{\mathbf{I}} + \overline{\mathbf{Z_C}}\,\overline{\mathbf{I}}$$

da cui si ricava:

$$\overline{\mathbf{I}} = \frac{\overline{\mathbf{V_{in}}}}{\mathbf{R} + \overline{\mathbf{Z_C}}}$$

$$\overline{\mathbf{V_R}} = \mathbf{R}\,\overline{\mathbf{I}} = \mathbf{R}\frac{\overline{\mathbf{V_{in}}}}{\mathbf{R} + \overline{\mathbf{Z_C}}}$$

e quindi:

$$\overline{\mathbf{A_R}} = \frac{\overline{\mathbf{V_R}}}{\overline{\mathbf{V_{in}}}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R} + \overline{\mathbf{Z_C}}} \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

sostituendo alla (3.2.1) la (1.3), si ha:

$$\overline{\mathbf{A_R}} = \frac{\mathbf{R}}{\left(\mathbf{R} + \frac{1}{\mathbf{j}\omega\mathbf{C}}\right)} = \frac{\mathbf{j}\omega\mathbf{RC}}{1+\mathbf{j}\omega\mathbf{RC}} = \frac{\omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2 + \mathbf{j}\omega\mathbf{RC}}{1+\omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2} = \omega\mathbf{RC}\frac{\omega\mathbf{RC} + \mathbf{j}}{1+\omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2} \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

Il vettore $\overline{\mathbf{A_R}}$ ha modulo $\mathbf{A_R}$ e fase $\phi_\mathbf{R}$.
Il modulo vale:

$$\boxed{\mathbf{A_R} = \frac{\omega\mathbf{RC}}{\sqrt{1+\omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2}}} \textbf{(3.2.3)}$$

La fase è:

$$\boxed{\phi_R = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\omega \mathbf{RC}}\right)} \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

3.2.1 Il modulo dell'Attenuazione $\mathbf{A_R}$

Dalla (3.2.3) si ricava che:

- ⇒ IL MODULO DELL'ATTENUAZIONE $\mathbf{A_R}$ VALE 0 PER **ω = 0**. RISPETTO ALLA CONTINUA IL CONDENSATORE SI COMPORTA COME UN CIRCUITO APERTO E QUINDI, NON CIRCOLANDO CORRENTE NEL CIRCUITO, LA TENSIONE AI CAPI DELLA RESISTENZA È NULLA.

- ⇒ IL MODULO DELL'ATTENUAZIONE $\mathbf{A_R}$ TENDE A 1 PER **ω→∞.** LA REATTANZA CAPACITIVA PER **ω→∞** TENDE A 0, IL CONDENSATORE TENDE A COMPORTARSI COME UN CORTO CIRCUITO E QUINDI TUTTA LA TENSIONE D'INGRESSO TENDE A RITROVARSI AI CAPI DELLA RESISTENZA.

Applicando la definizione già data di **FREQUENZA (PULSAZIONE) DI TAGLIO** si ricava che:

$$\boxed{\omega_{\mathbf{taglio}} = \frac{1}{\mathbf{RC}} \Rightarrow \mathbf{f_{taglio}} = \frac{1}{2\pi \mathbf{RC}}} \qquad \textbf{(3.2.6)}$$

3.2.2 Lo sfasamento ϕ_R

Dalla (3.2.4) si ricava che:

- ⇒ LO SFASAMENTO ϕ_R TENDE A **+90°** PER **ω→0**.

- ⇒ LO SFASAMENTO ϕ_R TENDE A **0°** PER **ω→∞.**

- ⇒ ALLA FREQUENZA DI TAGLIO ϕ_R VALE **+45°.**

3.2.3 Diagrammi di Bode di $\mathbf{A_R}$ e ϕ_R

Eseguendo il logaritmo in base 10 di entrambi i membri della relazione (3.6) si ha:

$$\mathbf{Log}(\mathbf{A_R}) = \mathbf{Log}\frac{\omega\mathbf{RC}}{\sqrt{1+\omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2}} = \mathbf{Log}(\omega\mathbf{RC}) - \mathbf{Log}\left(\sqrt{1+\omega^2\mathbf{R}^2\mathbf{C}^2}\right)$$

Quest'ultima relazione per

$$\boxed{\omega\mathbf{RC} >> 1 \Leftrightarrow \omega >> \frac{1}{\mathbf{RC}}}$$

cioè **per pulsazioni molto maggiori della pulsazione di taglio**, si riduce a:

$$\boxed{\mathbf{Log}(\mathbf{A_R}) \approx 0}$$

Mentre per:

$$\boxed{\omega\mathbf{RC} << 1 \Leftrightarrow \omega << \frac{1}{\mathbf{RC}}}$$

cioè **per pulsazioni molto minori della pulsazione di taglio** si ha :

$$\boxed{\mathbf{Log}(\mathbf{A_R}) \approx \mathbf{Log}(\omega\mathbf{RC}) = \mathbf{Log}\,\omega - \mathbf{Log}\frac{1}{\mathbf{RC}}}$$

Quest'ultima espressione nel piano **Log** $\mathbf{A_R}$ **- Log** $\boldsymbol{\omega}$ non è altro che l'equazione di una retta, parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, che incontra l'asse delle ordinate **(Log** $\boldsymbol{\omega}$**=0 ⇔** $\boldsymbol{\omega}$**=1rad/sec⇒f=159.15mHz)** per $\mathbf{A_R} = \omega \mathbf{RC} = \mathbf{RC}$.

Quindi nel piano Log $\mathbf{A_R}$ - Log $\boldsymbol{\omega}$, cioè in scala logaritmica, l'andamento di $\mathbf{A_R}$ è rettilineo sia per $\boldsymbol{\omega}$ molto minore della pulsazione di taglio, sia per $\boldsymbol{\omega}$ molto maggiore della pulsazione di taglio.

Riportiamo in **Figura n. 10** i Diagrammi di Bode ottenuti attraverso simulazione con µCAP3 del solito circuito R-C, prendendo l'uscita sulla resistenza.

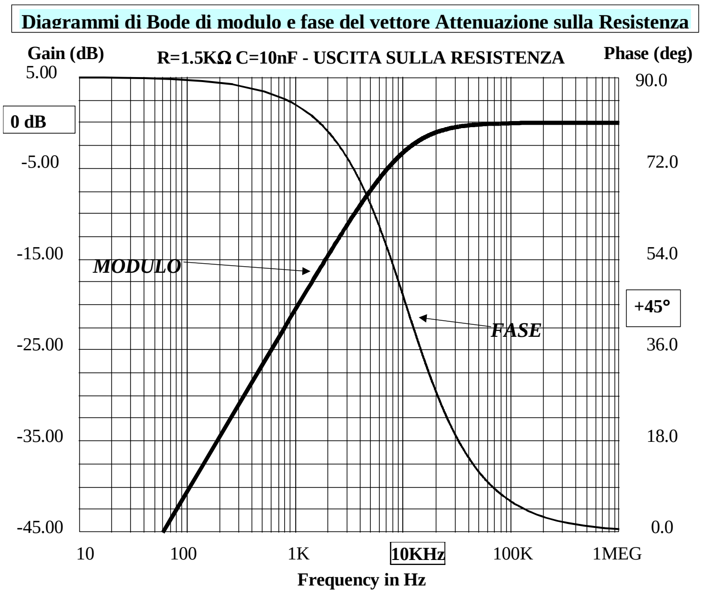

Figura n. 10

Dal Diagramma di Bode relativo al modulo notiamo che:

⇒ DALLA CONTINUA FINO A CIRCA LA FREQUENZA DI TAGLIO IL MODULO CRESCE CON UNA PENDENZA DI +20DB PER DECADE: I SEGNALI SINUSOIDALI D'INGRESSO VENGONO SEMPRE PIÙ ATTENUATI QUANTO PIÙ LA LORO FREQUENZA E' MINORE DELLA FREQUENZA DI TAGLIO

⇒ PER FREQUENZE SUPERIORI ALLA FREQUENZA DI TAGLIO IL MODULO DELL'ATTENUAZIONE E' UNITARIO: I SEGNALI SINUSOIDALI D'INGRESSO CHE CADONO IN QUEL CAMPO DI FREQUENZE NON SONO ATTENUATI E SI RITROVANO IN USCITA CON UGUALE AMPIEZZA.

Per questo comportamento rispetto al <u>segnale sinusoidale</u> tale circuito è chiamato FILTRO PASSA-ALTO.

Dal diagramma di Bode relativo alla fase notiamo che:

⇒ LA FASE RIMANE SOSTANZIALMENTE UGUALE A **+90°** FINO A CIRCA UNA DECADE PRIMA DELLA FREQUENZA DI TAGLIO;

⇒ TRA UNA DECADE PRIMA ED UNA DECADE DOPO LA FREQUENZA DI TAGLIO LA FASE PASSA DA **+90°** A **0°**

⇒ LA FASE VALE **+45°** ALLA FREQUENZA DI TAGLIO;

⇒ DA UNA DECADE DOPO LA FREQUENZA DI TAGLIO LA FASE RESTA **NULLA.**

ESERCIZIO: Progettare un filtro R-C PASSA-ALTO che alla frequenza di 3KHz produca un'attenuazione di 8dB. Trovare la frequenza di taglio del circuito. Trovare inoltre l'ampiezza, la fase ed il valor medio del segnale sinusoidale sulla Resistenza se poniamo in ingresso un segnale sinusoidale di ampiezza 2V, frequenza 10KHz e valor medio 1V. Ripetere il punto precedente per un segnale sinusoidale di ampiezza 3V, frequenza 10Hz e valor medio -1V. Trovare infine l'ampiezza, la fase ed il valor medio del segnale sinusoidale sul Condensatore per entrambi i segnali sinusoidali d'ingresso.

4. Diagrammi di BODE e risposta di un circuito ad una qualsiasi forma d'onda

Come abbiamo visto i Diagrammi di Bode sono ricavati ponendo all’ingresso del circuito un **segnale sinusoidale.**

Le informazioni che essi ci forniscono direttamente in termini di modulo e fase dell'Attenuazione (o del Guadagno) sono riferite solo a tale tipo di forma d'onda.

Da tali diagrammi è tuttavia possibile ricavare **informazioni utili** per individuare il comportamento del circuito **in risposta a qualsiasi tipo di forma d'onda**.
Prendiamo il solito circuito R-C già analizzato **(R=1.5KΩ, C=10nF)** che ha una frequenza di taglio di circa **10KHz**.

4.1 Uscita sul Condensatore

Poniamo all’ingresso di tale circuito tre **onde quadre** a **valor medio nullo** della stessa ampiezza ma di frequenze diverse:

⇒ LA PRIMA DI FREQUENZA **100HZ**, CIOÈ DI FREQUENZA CHE CADE **PIÙ DI UNA DECADE PRIMA** DI QUELLA DI TAGLIO.

⇒ LA SECONDA DI FREQUENZA **10KHZ**, CIOÈ DI FREQUENZA CIRCA UGUALE A **QUELLA DI TAGLIO.**

⇒ LA TERZA DI FREQUENZA **150KHZ**, CIOÈ DI FREQUENZA CHE CADE **PIÙ DI UNA DECADE DOPO** QUELLA DI TAGLIO

Simulando con μCAP3 la risposta del circuito ponendo di seguito in ingresso le tre onde quadre citate e prendendo l'**uscita sul condensatore,** otteniamo le forme d'onda riportate nelle **Figure nn. 11, 12 e 13**.

Dalla **Figura n. 11** notiamo che l'onda quadra a **100Hz** si ritrova praticamente immutata sul Condensatore.

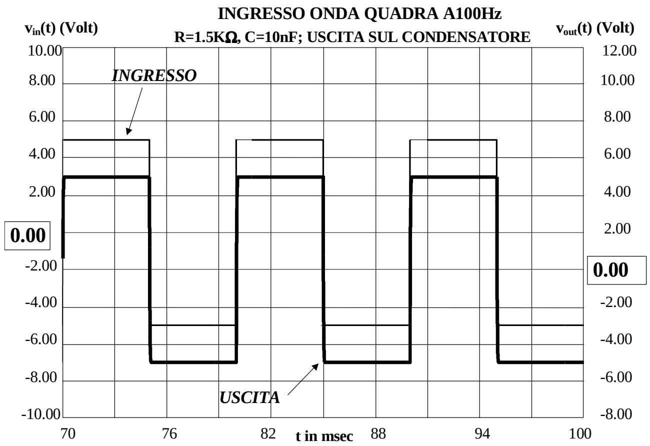

Figura n. 11

Dalla **Figura n. 12** notiamo che l'onda quadra a **10KHz** produce sul Condensatore una forma d'onda particolare.

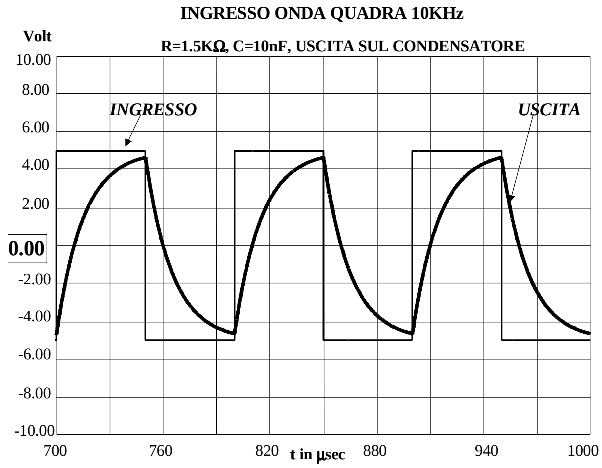

Figura n. 12

Dalla **Figura n. 13** notiamo che l'onda quadra a **150KHz** produce sul Condensatore una forma d'onda Triangolare, cioè una forma d'onda che risulta proporzionale **all'integrale** di quella posta in ingresso.

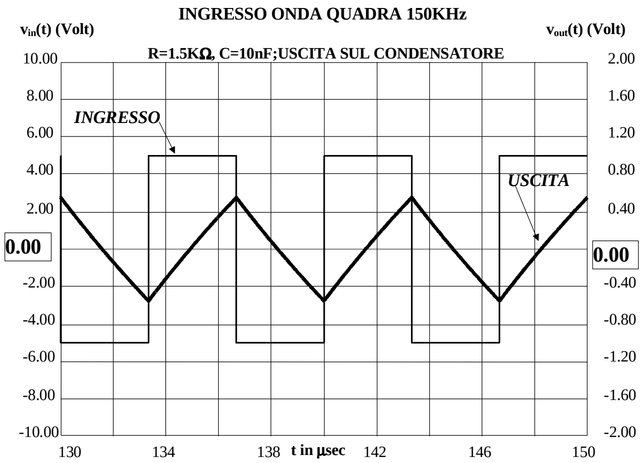

Figura n. 13

Questi risultati hanno valenza generale e possiamo affermare che:

> **qualsiasi circuito presenti, per un particolare intervallo di frequenze, un diagramma di Bode del modulo che vari di -20 dB per decade ed uno sfasamento di -90°, si comporta, in quel particolare campo di frequenze, come un INTEGRATORE.**

4.2 Uscita sulla Resistenza

Poniamo all'ingresso del solito circuito tre **segnali triangolari,** a **valor medio <u>non</u> nullo** della stessa ampiezza ma di frequenze diverse:

⇒ IL PRIMO DI FREQUENZA **100HZ**, CIOÈ DI FREQUENZA CHE CADE **PIÙ DI UNA DECADE PRIMA** DI QUELLA DI TAGLIO.

⇒ IL SECONDO DI FREQUENZA **10KHZ**, CIOÈ DI FREQUENZA CIRCA UGUALE **A QUELLA DI TAGLIO**.

⇒ IL TERZO DI FREQUENZA **150KHZ**, CIOÈ DI FREQUENZA CHE CADE **PIÙ DI UNA DECADE DOPO** QUELLA DI TAGLIO.

Simulando con µCAP3 la risposta del circuito ponendo di seguito in ingresso i tre segnali triangolari citati e prendendo l'**uscita sulla Resistenza,** otteniamo le forme d'onda riportate nelle **Figure nn. 14, 15 e 16.**

Dalla **Figura n. 14** notiamo che il segnale triangolare a **100Hz** produce sulla Resistenza una forma d'onda Quadra **a valor medio nullo**, cioè una forma d'onda che risulta proporzionale alla **derivata** di quella posta in ingresso*.*

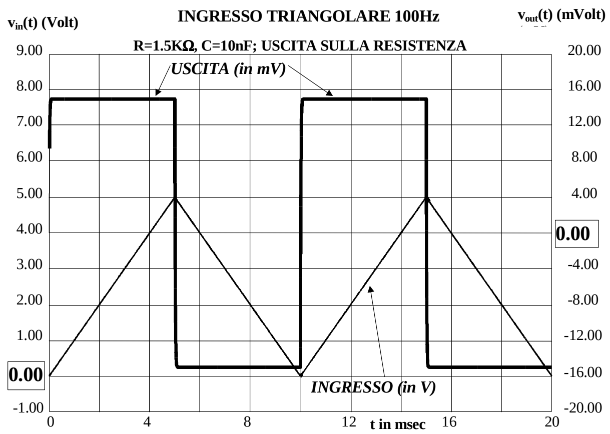

Figura n. 14

Dalla **Figura n. 15** notiamo che il segnale triangolare a **10KHz** produce sulla Resistenza una forma d'onda particolare **a valor medio nullo***.*

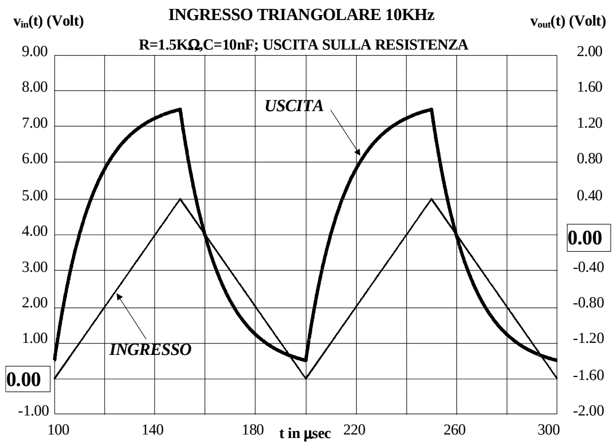

Figura n. 15

Dalla **Figura n. 16** notiamo che il segnale triangolare a **150KHz** si ritrova praticamente immutato, **ma a valor medio nullo**, sulla Resistenza*.*

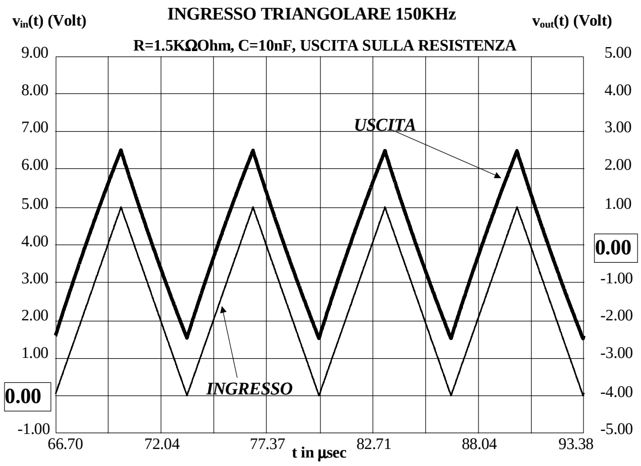

Figura n. 16

Questi risultati hanno valenza generale e possiamo quindi affermare:

> **Un qualsiasi circuito che presenti, per un particolare intervallo di frequenze, un diagramma di Bode del modulo che vari di +20 dB per decade ed abbia uno sfasamento di +90°, si comporta, in quel particolare campo di frequenze, come un DERIVATORE.**
>
> **Se tale andamento del Diagramma parte dalla continua, anche il valor medio del segnale d'ingresso è derivato e di conseguenza non si ritrova in uscita.**

5. La Trasformata di LAPLACE

A questo punto siamo in grado di trovare la risposta del circuito R-C al segnale sinusoidale e di ricavare dai diagrammi di Bode dello stesso circuito informazioni qualitative sulla risposta a qualsiasi tipo di forma d'onda.
Non siamo al contrario ancora in grado di trovare per qualsiasi forma d'onda le equazioni delle forme d'onda sulla Resistenza e sul Condensatore, cioè per esempio le equazioni delle forme d'onda in uscita delle **Figure nn. 11, 12, 13, 14, 15 e 16**.

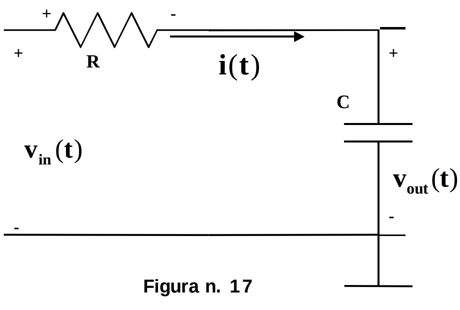

Figura n. 17

I legami di tipo differenziale tra la corrente e la tensione sia per il Condensatore sia per l'Induttanza pongono non pochi problemi matematici quando si debba trovare il comportamento di circuiti comprendenti questi componenti in risposta ad una generica forma d'onda d'ingresso $v_{in}(t)$.
Prendiamo a titolo d'esempio il circuito in **Figura n. 17**, cioè il semplice, solito, circuito R-C.
Vogliamo trovare il legame tra la tensione d'uscita e quella d'ingresso. Scriviamo per prima cosa l'equazione della maglia:

$$\mathbf{v_{in}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Ri}(\mathbf{t}) - \mathbf{v_{out}}(\mathbf{t}) = 0 \qquad \textbf{(5.1)}$$

La corrente i(t) circola anche nel Condensatore ed è quindi legata alla tensione ai capi del Condensatore dalla (1.1).
Di conseguenza la (5.1) diventa:

$$\boxed{\mathbf{v_{in}}(\mathbf{t}) - \mathbf{RC}\frac{\mathbf{dv_{out}}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}} - \mathbf{v_{out}}(\mathbf{t}) = 0 \Rightarrow \mathbf{RC}\frac{\mathbf{dv_{out}}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}} + \mathbf{v_{out}}(\mathbf{t}) = \mathbf{v_{in}}(\mathbf{t})} \qquad \textbf{(5.2)}$$

L'equazione della nostra pur semplice maglia è **un'equazione differenziale**, che non sappiamo ancora risolvere.

Piuttosto che affrontare lo studio dei metodi per risolvere le equazioni differenziali si preferisce, non solo per la difficoltà di tali metodi ma anche perché ne trarremo dei vantaggi più generali, aggirare l'ostacolo utilizzando le **Trasformate di Laplace**.
Vediamo prima a livello qualitativo in cosa consiste questo metodo.
Si individua un legame matematico che faccia corrispondere ad ogni funzione nel dominio del tempo una ed una sola funzione nel dominio di una nuova variabile. Tale legame è scelto in modo che le equazioni, che nel dominio del tempo sono di tipo differenziale, diventino nel dominio di questa nuova variabile delle equazioni algebriche e quindi siano di facile soluzione.
Una volta trovato l'andamento della grandezza che ci interessa (per noi solitamente la tensione d'uscita) nel dominio di questa nuova variabile, per trovarne l'andamento nel dominio del tempo sarà sufficiente compiere l'operazione inversa, anti-trasformando il risultato trovato.
In **Figura n. 18** è riportato uno schema che tenta di tradurre visivamente il procedimento descritto.

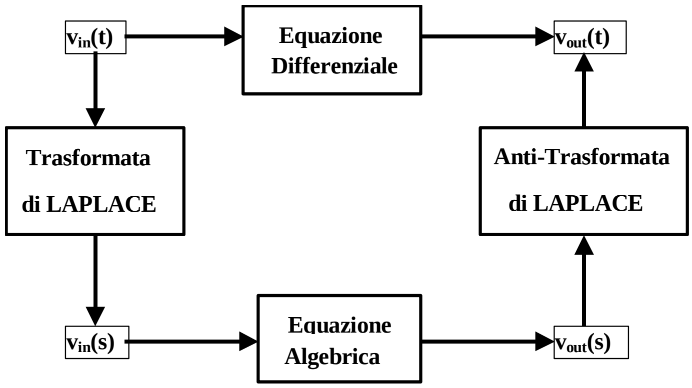

Figura n. 18

Quindi la Trasformata di Laplace è un legame matematico che permette di far corrispondere ad ogni funzione del tempo f(t) una ed una sola funzione di una nuova variabile complessa che è chiamata solitamente s. Tale legame è dato dalla relazione:

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathbf{f}(\mathbf{t})] = \int_0^\infty \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{e}^{-\mathbf{st}}\mathbf{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{s})} \qquad \textbf{(5.3)}$$

dove $s = \sigma + j\omega$
È evidente che per funzioni f(t) di una certa complessità anche trovare la F(s) attraverso la (5.3) non sarà del tutto agevole. Esistono d'altra parte su tutti i testi (in quello d'Elettronica alle pagg. 61-63 del Volume n. 2) delle tabelle che riportano le $\mathcal{L}$-Trasformate delle funzioni nel tempo più comuni e delle Anti-trasformate di un gran numero di funzioni F(s).
Quindi in un certo numero di casi non sarà un problema né Trasformare una f(t) nella corrispondente F(s), né fare l'operazione inversa.

Riportiamo di seguito, senza dimostrarli, i Teoremi principali sulle Trasformate di Laplace:

1. **Teorema di Linearità**: La $\mathcal{L}$-Trasformata del prodotto di una costante k per una funzione f(t) è data dal prodotto della costante k per la $\mathcal{L}$-Trasformata della f(t); cioè:

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathbf{kf}(\mathbf{t})] = \mathbf{k}\mathcal{L}[\mathbf{f}(\mathbf{t})] = \mathbf{kF}(\mathbf{s})} \qquad \textbf{(5.4)}$$

2. **Teorema di Sovrapposizione**: La $\mathcal{L}$-Trasformata della somma (differenza) di due funzioni è uguale alla somma (differenza) delle $\mathcal{L}$-Trasformate; cioè:

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathbf{f}_1(\mathbf{t}) \pm \mathbf{f}_2(\mathbf{t})] = \mathcal{L}[\mathbf{f}_1(\mathbf{t})] \pm \mathcal{L}[\mathbf{f}_2(\mathbf{t})] = \mathbf{F}_1(\mathbf{s}) \pm \mathbf{F}_2(\mathbf{s})} \qquad \textbf{(5.5)}$$

3. **Teorema della Derivata**: La $\mathcal{L}$-Trasformata della derivata prima di una funzione f(t) è data da:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{\mathbf{df}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}}\right] = \mathbf{sF}(\mathbf{s}) - \mathbf{f}(0^+)} \qquad \textbf{(5.6)}$$

dove $f(0^+)$ è il valore del limite destro della funzione f(t) all'istante 0.

4. **Teorema dell'Integrale**: La $\mathcal{L}$-Trasformata dell'integrale di una funzione f(t) è data da:

$$\boxed{\ell\left[\int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{dt}\right] = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}}} \qquad \textbf{(5.7)}$$

Vediamo come sia concretamente utilizzabile quanto detto.
Partiamo dal circuito in **Figura n. 17** e dall'Equazione Differenziale (5.2).
$\mathcal{L}$-Trasformando entrambi i membri della (5.2) ed applicando il Teorema di Linearità e quello di Sovrapposizione si ha:

$$\ell\left[\mathbf{RC}\frac{\mathbf{dv_{out}}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}} + \mathbf{v_{out}}(\mathbf{t})\right] = \ell[\mathbf{v_{in}}(\mathbf{t})] \Rightarrow \mathbf{RC}\ell\left[\frac{\mathbf{dv_{out}}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}}\right] + \ell[\mathbf{v_{out}}(\mathbf{t})] = \ell[\mathbf{v_{in}}(\mathbf{t})] \qquad \textbf{(5.8)}$$

applicando ora il Teorema della Derivata e **considerando il condensatore inizialmente scarico**, si ha:

$$\mathbf{RCsV_{out}}(\mathbf{s}) + \mathbf{V_{out}}(\mathbf{s}) = \mathbf{V_{in}}(\mathbf{s}) \Rightarrow \mathbf{V_{out}}(\mathbf{s})(\mathbf{RCs}+1) = \mathbf{V_{in}}(\mathbf{s}) \qquad \textbf{(5.9)}$$

Se ora vogliamo trovare l'andamento della risposta del circuito in esame ad un particolare segnale d'ingresso, per esempio **un gradino d'ampiezza** $\mathbf{V}_0$ basterà trovare dalla tabella alle pagg. 61-63 del libro di testo la $\mathcal{L}$-Trasformata del nostro segnale d'ingresso.
Troviamo che essa vale $\mathbf{V}_0/\mathbf{s}$ e quindi, sostituendo questo particolare valore alla $\mathbf{V_{in}}(\mathbf{s})$ della (5.9), si ha:

$$\mathbf{V_{out}}(\mathbf{s})(\mathbf{RCs}+1) = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{s}} \Rightarrow \mathbf{V_{out}}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{s}(\mathbf{RCs}+1)} \qquad \textbf{(5.10)}$$

La (5.10) ci da la $\mathcal{L}$-Trasformata della tensione d'uscita quando in ingresso poniamo un segnale a gradino d'ampiezza $\mathbf{V}_0$.
Per avere l'andamento nel tempo della tensione d'uscita occorre Anti-trasformare la $\mathbf{V_{out}}(\mathbf{s})$ trovata nella (5.10).
Mettendo in evidenza RC al denominatore si ha:

$$\mathbf{V_{out}}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{RCs}\left(\mathbf{s}+\frac{1}{\mathbf{RC}}\right)} = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{RC}}\frac{1}{\mathbf{s}\left(\mathbf{s}+\frac{1}{\mathbf{RC}}\right)} \qquad \textbf{(5.11)}$$

Ora, utilizzando la tabella alle pagg. 61-63 del libro di testo (in particolare la n. 9 di pag. 61) si ha:

$$\boxed{\mathbf{v_{out}}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{RC}}\mathbf{RC}\left[1-\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/(\mathbf{RC})}\right] = \mathbf{V}_0\left[1-\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/(\mathbf{RC})}\right]} \qquad \textbf{(5.12)}$$

La relazione (5.12) ci fornisce l'equazione nel tempo della carica del condensatore in un circuito R-C in risposta ad un gradino di tensione d'ampiezza V_0, quando il condensatore è inizialmente, cioè nell'istante nel quale arriva il gradino di tensione, scarico.

Se al contrario il condensatore è **inizialmente carico** alla tensione $\mathbf{V_{C0}}$, occorre ripartire dalla relazione (5.8).
Infatti in luogo della (5.9) si ha:

$$\mathbf{RC}[\mathbf{sV_{out}}(\mathbf{s}) - \mathbf{V_{C0}}] + \mathbf{V_{out}}(\mathbf{s}) = \mathbf{V_{in}}(\mathbf{s}) \Rightarrow \mathbf{V_{out}}(\mathbf{s})(\mathbf{RCs}+1) = \mathbf{V_{in}}(\mathbf{s}) + \mathbf{RCV_{C0}} \qquad \textbf{(5.13)}$$

Sempre volendo ottenere la risposta ad un gradino d'ampiezza $\mathbf{V}_0$ in questo caso in luogo della (5.10) si ha:

$$\mathbf{V_{out}}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{s}(\mathbf{RCs}+1)} + \frac{\mathbf{RCV_{C0}}}{\mathbf{RCs}+1} = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{RC}}\frac{1}{\mathbf{s}\left(\mathbf{s}+\frac{1}{\mathbf{RC}}\right)} + \frac{\mathbf{RCV_{C0}}}{\mathbf{RC}}\frac{1}{\mathbf{s}+\frac{1}{\mathbf{RC}}} \qquad \textbf{(5.14)}$$

Ora utilizzando sempre la tabella alle pagg. 61-63 del libro di testo (in questo caso non solo la precedente ma anche la n. 7 dall'alto di pag. 61) si ha in luogo della (5.12):

$$\boxed{\mathbf{v_{out}(t)} = \frac{\mathbf{V_0}}{\mathbf{RC}}\mathbf{RC}\left[1-\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/(\mathbf{RC})}\right]+\mathbf{V_{C0}}\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/(\mathbf{RC})} = \mathbf{V_0} + (\mathbf{V_{C0}} - \mathbf{V_0})\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/(\mathbf{RC})}} \quad \textbf{(5.15)}$$

La relazione (5.15) è l'equazione generale della risposta di un circuito R-C, uscita su C, ad un gradino di tensione.

Da tale relazione notiamo che questa risposta è del tipo:

$$\boxed{\mathbf{v_C(t)} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/(\mathbf{RC})}} \qquad \textbf{(5.16)}$$

dove:

⇒ A È IL VALORE CHE LA TENSIONE SUL CONDENSATORE ASSUME PER **T⟶∞.** NEL NOSTRO CASO $\mathbf{V_0}$.

⇒ A+B È IL VALORE CHE LA TENSIONE SUL CONDENSATORE ASSUME **ALL'ISTANTE INIZIALE**, CIOÈ PER **T=0** ISTANTE NEL QUALE AVVIENE LA COMMUTAZIONE. NEL NOSTRO CASO $\mathbf{V_{C0}}$.

⇒ B È DI CONSEGUENZA LA DIFFERENZA TRA IL VALORE CHE LA TENSIONE SUL CONDENSATORE ASSUME **ALL'ISTANTE INIZIALE** ED IL VALORE CHE TALE TENSIONE ASSUME PER **T⟶∞.** NEL NOSTRO CASO $\mathbf{B} = \mathbf{V_{C0}} - \mathbf{V_0}$.

Da quanto detto siamo ora in grado di trovare l'equazione della risposta di un condensatore posto in un circuito R-C ad un gradino di tensione.
Per differenza possiamo trovare l'equazione dell'andamento della tensione ai capi della resistenza.
Sempre dall'equazione (5.16) possiamo calcolare le equazioni della risposta di un circuito R-C ad una qualsiasi onda quadra.
Rimandiamo al paragrafo 7 e successivi lo studio di questi casi particolari e proseguiamo la trattazione della Trasformata di Laplace.

6. La Funzione di Trasferimento (F.d.T.) di una rete

Dalla (5.9) si ricava:

$$\boxed{\frac{\mathbf{V_{out}(s)}}{\mathbf{V_{in}(s)}} = \frac{1}{\mathbf{RCs}+1} = \mathbf{F(s)}} \qquad \textbf{(6.1)}$$

La F(s) prende il nome di FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (di seguito F.d.T) del circuito e non è altro che il rapporto tra la $\mathcal{L}$-Trasformata della risposta di un sistema e la $\mathcal{L}$-Trasformata della corrispondente sollecitazione d'ingresso.

Per l'uso che ne faremo nel corso d'Elettronica le grandezze d'ingresso e d'uscita saranno solitamente entrambe delle tensioni.
Come vedremo successivamente dalla F.d.T. si ricavano un gran numero di informazioni sul comportamento del circuito, tanto che solitamente è proprio dalla ricerca della F.d.T. che si parte per l'analisi o la sintesi di una rete.
Nel paragrafo precedente abbiamo visto come si possa arrivare alla F.d.T. applicando i teoremi sulle $\mathcal{L}$-Trasformate all'Equazione differenziale che rappresenta il circuito o, più in generale, il sistema.
Lavorando noi prevalentemente su circuiti elettronici, c'interessa riuscire a trovare la F.d.T. di una rete senza dover ogni volta ricercare l'equazione differenziale.

Questo può essere fatto $\mathcal{L}$-Trasformando direttamente la rete, trovando in particolare le IMPEDENZE nel campo della variabile s dei componenti elementari.

Scriviamo di seguito il legame tra la tensione e la corrente per Resistenza, Capacità ed Induttanza nel **dominio del tempo**:

per la RESISTENZA $\qquad \mathbf{v_R(t)} = \mathbf{R}\mathbf{i_R(t)} \qquad$ **(6.2)**

per la CAPACITÀ $$i_C(t)=C\left[\frac{dv_C(t)}{dt}\right] \quad (6.3)$$

per l'INDUTTANZA $$v_L(t)=L\left[\frac{di_L(t)}{dt}\right] \quad (6.4)$$

$\mathcal{L}$-Trasformando queste tre relazioni utilizzando i Teoremi visti, in particolare quello della Derivata, si ottiene:

per la RESISTENZA	$\boxed{V_R(s)=RI_R(s)}$	**(6.5)**
per la CAPACITÀ	$\boxed{I_C(s)=C\,sV_C(s)-Cv_C(0)\Rightarrow V_C(s)=\frac{1}{sC}I_C(s)+\frac{v_C(0)}{s}}$	**(6.6)**
per l'INDUTTANZA	$\boxed{V_L(s)=LsI_L(s)-Li_L(0)}$	**(6.7)**

Dalle relazioni (6.5), (6.6) e (6.7) si ricava che per trasformare gli schemi dal dominio del tempo a quello della variabile s dobbiamo sostituire a Resistenza, Capacità ed Induttanza i circuiti riportati nella **Figura n. 19**.

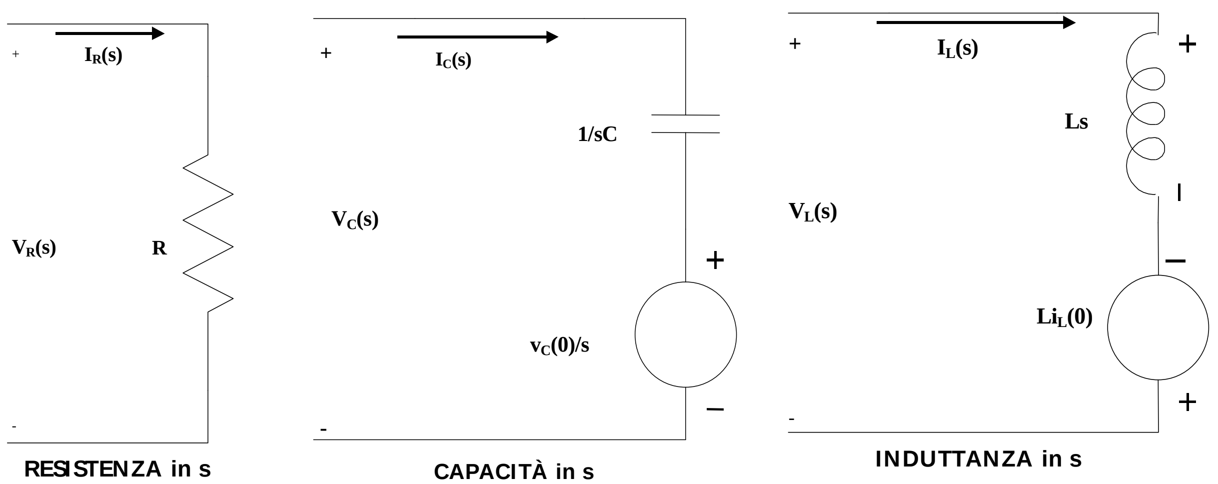

Figura n. 19

Nel caso le **condizioni iniziali siano nulle**, cioè la tensione iniziale ai capi del Condensatore o la corrente iniziale nell'Induttanza siano nulle, le Impedenze dei componenti elementari sono definite come segue:

RESISTENZA in s	$\boxed{Z(s)=\frac{V_R(s)}{I_R(s)}=R}$	**(6.8)**
CAPACITÀ in s	$\boxed{Z(s)=\frac{V_C(s)}{I_C(s)}=\frac{1}{sC}}$	**(6.9)**
INDUTTANZA in s	$\boxed{Z(s)=\frac{V_L(s)}{I_L(s)}=sL}$	**(6.10)**

Utilizzando le ultime tre relazioni è possibile trasformare un qualsiasi circuito dal dominio del tempo nel dominio della variabile s e quindi trovare da quest'ultimo la Funzione di Trasferimento.

Inoltre dalle stesse relazioni notiamo che:

le Impedenze ricavate nel dominio della variabile s, coincidono con le impedenze ricavate per il segnale sinusoidale, se sostituiamo alla s la quantità jω.

Quindi, una volta trovata la F.d.T. F(s), la F(jω), ottenuta sostituendo a S jω, ci dà la risposta del circuito al segnale sinusoidale.

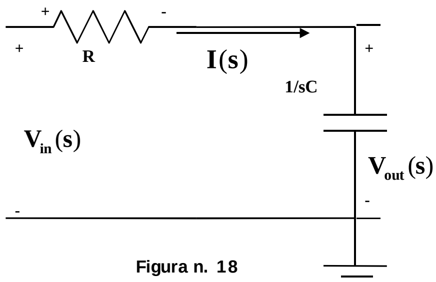

Figura n. 18

Tornando al circuito R-C di **Figura n. 17** già esaminato, abbiamo che esso in s diventa quello riportato in **Figura n. 18**. Scrivendo l'equazione della maglia si ha:

$$\mathbf{V_{in}}(\mathbf{s}) - \mathbf{RI}(\mathbf{s}) - \frac{1}{\mathbf{sC}}\mathbf{I}(\mathbf{s}) = 0 \qquad \textbf{(6.11)}$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V_{in}}(\mathbf{s})}{\mathbf{R} + 1/\mathbf{sC}} = \frac{\mathbf{sC}}{1+\mathbf{sCR}}\mathbf{V_{in}}(\mathbf{s})$$

da cui si ricava:

$$\mathbf{V_{out}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{sC}}\mathbf{I}(\mathbf{s}) \Rightarrow \mathbf{V_{out}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{sC}}\frac{\mathbf{sC}}{1+\mathbf{sCR}}\mathbf{V_{in}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{1+\mathbf{sCR}}\mathbf{V_{in}}(\mathbf{s}) \qquad \textbf{(6.12)}$$

e quindi:

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V_{out}}(\mathbf{s})}{\mathbf{V_{in}}(\mathbf{s})} = \frac{1}{1+\mathbf{sCR}}} \qquad \textbf{(6.13)}$$

Notiamo che ovviamente la (6.13) è identica alla (6.1) ricavata dall'Equazione differenziale.
Sostituendo nella (6.13) al posto della s il termine jω troviamo:

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{j}\omega\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V_{out}}(\mathbf{j}\omega)}{\mathbf{V_{in}}(\mathbf{j}\omega)} = \frac{1}{1+\mathbf{j}\omega\mathbf{CR}}} \qquad \textbf{(6.14)}$$

relazione che lega la tensione d'uscita a quella d'ingresso nel caso quest'ultima sia un segnale sinusoidale.

Alla (6.14) eravamo già arrivati con la (3.1.2) attraverso lo studio fatto a partire dalle sole conoscenze d'Elettrotecnica sui metodi d'analisi delle reti in regime alternato sinusoidale.

6.1 Poli e Zeri di una Funzione di Trasferimento

Per i sistemi che sono descritti da equazioni differenziali lineari, la F.d.T. è sempre data dal rapporto di due polinomi. Cioè è del tipo:

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{b_n s^n} + \mathbf{b_{n-1} s^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + \mathbf{b_2 s^2} + \mathbf{b_1 s} + \mathbf{b_0}}{\mathbf{a_m s^m} + \mathbf{a_{m-1} s^{m-1}} + \ldots\ldots\ldots + \mathbf{a_2 s^2} + \mathbf{a_1 s} + \mathbf{a_0}}} \qquad \textbf{(6.1.1)}$$

In una F.d.T. prendono il nome di ZERI gli n valori <u>finiti</u> di s che annullano il Numeratore della (6.1.1), cioè che mandano a zero la F.d.T.

In una F.d.T. prendono il nome di POLI gli m valori <u>finiti</u> di s che annullano il Denominatore della (6.1.1), cioè che mandano ad infinito la F.d.T.

Se chiamiamo $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ gli n ZERI e $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_m$ gli m POLI, la (6.1.1) può essere scritta anche nella forma:

$$\boxed{F(s) = \frac{b_n(s - z_1)(s - z_2)\cdots\cdots(s - z_n)}{a_m(s - p_1)(s - p_2)\cdots\cdots(s - p_m)}} \qquad \textbf{(6.1.2)}$$

che a sua volta può essere scritta nella forma::

$$F(s) = \frac{b_n z_1 z_2 \cdots\cdots z_n \left(\frac{s}{z_1} - 1\right)\left(\frac{s}{z_2} - 1\right)\cdots\cdots\left(\frac{s}{z_n} - 1\right)}{a_m p_1 p_2 \cdots\cdots p_m \left(\frac{s}{p_1} - 1\right)\left(\frac{s}{p_2} - 1\right)\cdots\cdots\left(\frac{s}{p_m} - 1\right)} = K \frac{\left(\frac{s}{z_1} - 1\right)\left(\frac{s}{z_2} - 1\right)\cdots\cdots\left(\frac{s}{z_n} - 1\right)}{\left(\frac{s}{p_1} - 1\right)\left(\frac{s}{p_2} - 1\right)\cdots\cdots\left(\frac{s}{p_m} - 1\right)}$$

(6.1.3)

la costante K, coincidendo con il valore che la F.d.T. assume per s=0, viene anche chiamata K-statico.

6.2 Ricerca dei poli e degli zeri di una F.d.T.

La ricerca dei poli e degli zeri di una F.d.T. può essere condotta essenzialmente in due modi:

⇒ TROVANDO PER VIA ANALITICA LA F.D.T. DEL CIRCUITO, SCRIVENDOLA NELLA FORMA RIPORTATA NELLA (6.1.3) E QUINDI INDIVIDUANDO POLI, ZERI E COSTANTE K;

⇒ TROVANDO DIRETTAMENTE DALLA RETE I POLI, GLI ZERI ED IL VALORE DELLA COSTANTE K.

Mentre il primo metodo non richiede particolari approfondimenti, trattandosi di fatto di applicare i teoremi ed i principi studiati in Elettrotecnica ai circuiti $\mathcal{L}$-Trasformati, il secondo merita invece di essere illustrato compiutamente.

6.2.1 Numero dei poli

Il numero di poli di una F.d.T. di una rete coincide con il numero d'elementi reattivi indipendenti presenti nella rete. Sono considerate indipendenti le capacità o le induttanze che, una volta resi ininfluenti i generatori indipendenti di tensione e di corrente, quindi cortocircuitati quelli di tensione ed aperti quelli di corrente, non siano riconducibili ad un solo elemento, capacitivo od induttivo, mediante operazioni di serie e parallelo.

6.2.2 Numero degli zeri

Notiamo che la F.d.T., nelle varie forme algebriche da noi scritte, è sempre data dal rapporto di due polinomi.
Il grado del polinomio al numeratore coincide con il numero degli zeri della F.d.T., mentre il grado del polinomio al denominatore coincide con il numero dei poli.
Da quanto detto e ricordando che il limite per x che tende ad infinito del rapporto di due polinomi nella variabile x , tende a:

⇒ UNA COSTANTE SE IL GRADO DEL NUMERATORE È UGUALE AL GRADO DEL DENOMINATORE;

⇒ ZERO SE IL GRADO DEL DENOMINATORE È MAGGIORE DEL GRADO DEL NUMERATORE;

⇒ INFINITO SE IL GRADO DEL NUMERATORE È MAGGIORE DEL GRADO DEL DENOMINATORE.

Da quanto detto si ricava un metodo per ricavare direttamente dalla rete se il numero degli zeri è maggiore, minore o uguale al numero dei poli:

Si fa tendere ad infinito la variabile s e si trova dalla rete se la F.d.T. tende ad una costante non nulla, a zero o ad infinito.

1. **Se tende ad una costante allora il numero degli zeri coincide con il numero dei poli**
2. **Se tende a zero il numero dei poli è maggiore del numero degli zeri.**
3. **Se tende ad infinito il numero degli zeri è maggiore del numero dei poli.**

6.2.3 Valore dei poli

In generale il valore dei poli è dato dalle soluzioni dell'equazione che si trova eguagliando a zero l'Ammettenza vista ai capi di uno qualsiasi degli elementi della rete, comprendendo l'elemento stesso. Solitamente si sceglie uno degli elementi reattivi. I poli sono quindi in generale dei numeri complessi.

Se, come nei casi che analizzeremo inizialmente, siamo in presenza di **un solo elemento reattivo** o d'elementi reattivi detti **"non interagenti"** la ricerca dei poli di una rete si semplifica ed **in questo caso**:

il polo associato ad ogni singolo elemento reattivo è un numero reale negativo ed il suo modulo, cioè la pulsazione del polo, è dato dell'inverso della costante tempo (prodotto della Capacità per la Resistenza che si vede ai suoi capi o dell'Induttanza per l'inverso della Resistenza che si vede ai suoi capi) associata all'elemento reattivo in questione.

Più elementi reattivi sono detti "non interagenti" se ognuno di essi vede ai suoi capi una pura resistenza e non anche l'impedenza degli altri elementi reattivi.

6.2.4 Valore degli zeri

Per trovare il valore degli zeri occorre trovare dalla rete le condizioni circuitali che annullano l'uscita pur in presenza di un segnale d'ingresso. I valori finiti di s che soddisfano tali condizioni circuitali sono gli zeri della F.d.T.

6.2.5 Il K-statico

Resta da trovare la costante K che si ricava:

imponendo alla F.d.T., trovata a meno del K dalla conoscenza dei valori dei poli e degli zeri, il valore, se costante e non nullo, che la nostra rete assume quando s vale zero o per s che tende ad infinito .

Vedremo a partire dal paragrafo n. 8 com'è applicato quanto detto alle reti.
Ora torniamo al circuito RC per trovare com'esso risponda alle variazioni brusche di tensione applicate in ingresso.

7. Risposta di un circuito R-C alle variazioni brusche di tensione.

7.1 Risposta al gradino di tensione

Attraverso l'utilizzo della Trasformata di Laplace abbiamo trovato **l'equazione (5.16)** che descrive l'andamento nel tempo della tensione sul Condensatore e sulla Resistenza quando all'ingresso del circuito RC poniamo un gradino di tensione di valore $\mathbf{V}_0$ **,** cioè un segnale come quello riportato in **Figura n. 19.** Tale segnale rappresenta una variazione brusca, teoricamente istantanea, tra due livelli di tensione continua:nel caso in figura la tensione passa nell'istante 0 dal valore 0V al valore che abbiamo chiamato $\mathbf{V}_0$.

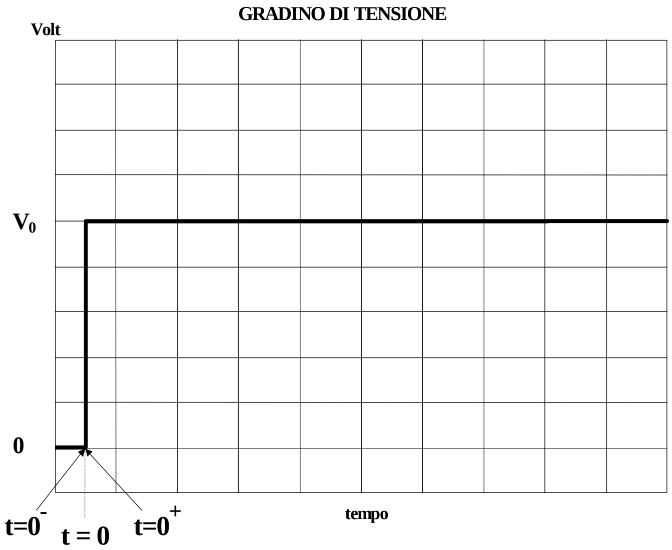

Figura n. 19

Poiché la variazione di tensione avviene in un tempo nullo ed all'istante t=0, nella figura abbiamo individuato, oltre all'istante della commutazione, gli istanti $t=0^-$ e $t=0^+$ cioè l'istante t=0 prima e dopo la commutazione.
Riportiamo l'equazione **(5.16)**

$$\boxed{v_{C(R)}(t) = A + B\ e^{-(t/\tau)}} \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

dove:

- ⇒ τ È PRENDE IL NOME DI **COSTANTE TEMPO** DEL CIRCUITO ED È DATA DAL PRODOTTO RC.
- ⇒ IL TERMINE "**E**" È LA BASE DEI LOGARITMI NEPERIANI.
- ⇒ I TERMINI A E B SONO DELLE COSTANTI CHE SI RICAVANO DALLE CONDIZIONI INIZIALI (VALORE DELLE TENSIONI ALL'ISTANTE 0^+ DELLA COMMUTAZIONE) E FINALI (VALORE DELLE TENSIONI PER T CHE TENDE AD INFINITO).

Nel caso del gradino riportato in **figura n. 19** posto in ingresso ad un circuito R-C, supponendo il Condensatore inizialmente scarico, si ha:

$v_{in}(t = 0^-) = 0$	$v_{in}(t = 0^+) = V_0$	$v_{in}(t \to \infty) = V_0$
$v_C(t = 0^-) = 0$	$v_C(t = 0^+) = 0$	$v_C(t \to \infty) = V_0$
$v_R(t = 0^-) = 0$	$v_R(t = 0^+) = V_0$	$v_R(t \to \infty) = 0$

Ricordiamo infatti che:

1. il condensatore istantaneamente risponde alle variazioni brusche di tensione comportandosi come un corto circuito, se inizialmente scarico, e più in generale come un generatore ideale di tensione, di valore e polarità pari alla tensione presente ai suoi capi all'istante della commutazione;

2. nel lungo periodo, quando il tempo tende cioè ad infinito, il condensatore si comporta come un circuito aperto;

3. in ogni istante e con riferimento alle polarità della Figura n. 20, è sempre vero che: $v_{in}(t) = v_C(t) + v_R(t)$

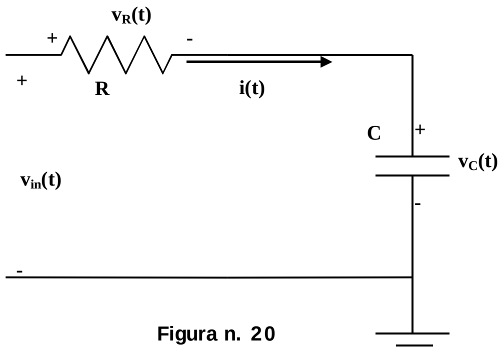

Figura n. 20

Volendo trovare l'equazione dell'andamento di $v_C(t)$, basterà trovare i valori delle costanti A e B presenti nella (7.1), imponendo i valori iniziali e finali:

$$\mathbf{v_C}\left(\mathbf{t}=0^+\right)=\mathbf{A}+\mathbf{B}\ \ \mathbf{e}^{-(0/\tau)}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{0}\ (*)$$

$$\mathbf{v_C}\left(\mathbf{t}\to\infty\right)=\mathbf{A}+\mathbf{B}\ \ \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}\to\infty/\tau)}=\mathbf{A}=\mathbf{V}_0\ (**)$$

(*) ricordiamo che qualsiasi numero elevato a zero è uguale ad 1.

(*) ricordiamo che $\lim_{\mathbf{x}\to\infty}\mathbf{e}^{-\mathbf{x}}=\lim_{\mathbf{x}\to\infty}\frac{1}{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}}=0$

Dal sistema tra le due ultime equazioni si ricava:

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}_0 \qquad\qquad \mathbf{B}=-\mathbf{V}_0$$

Quindi, sostituendo i valori trovati di A e B nella (7.1.1), si ha che, nel caso in esame, l'equazione dell'andamento della v_C in funzione del tempo è il seguente:

$$\boxed{\mathbf{v_C}(\mathbf{t})=\mathbf{V}_0-\mathbf{V}_0\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}/\tau)}=\mathbf{V}_0\left[1-\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}/\tau)}\right]}\quad \textbf{(7.1.2)}$$

In modo del tutto analogo si ricava l'andamento di $v_R(t)$.

$$\mathbf{v_R}\left(\mathbf{t}=0^+\right)=\mathbf{A}+\mathbf{B}\ \ \mathbf{e}^{-(0/\tau)}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{V}_0$$

$$\mathbf{v_R}\left(\mathbf{t}\to\infty\right)=\mathbf{A}+\mathbf{B}\ \ \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}\to\infty/\tau)}=\mathbf{A}=0$$

Dal sistema tra le due ultime equazioni si ricava:

$$\mathbf{A}=0 \qquad\qquad \mathbf{B}=\mathbf{V}_0$$

Quindi, sostituendo i valori trovati di A e B nella (7.1.1), si ha che, nel caso in esame, l'equazione dell'andamento della v_R in funzione del tempo è il seguente:

$$\boxed{\mathbf{v_R}(\mathbf{t})=\mathbf{V}_0\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}/\tau)}}\qquad \textbf{(7.1.3)}$$

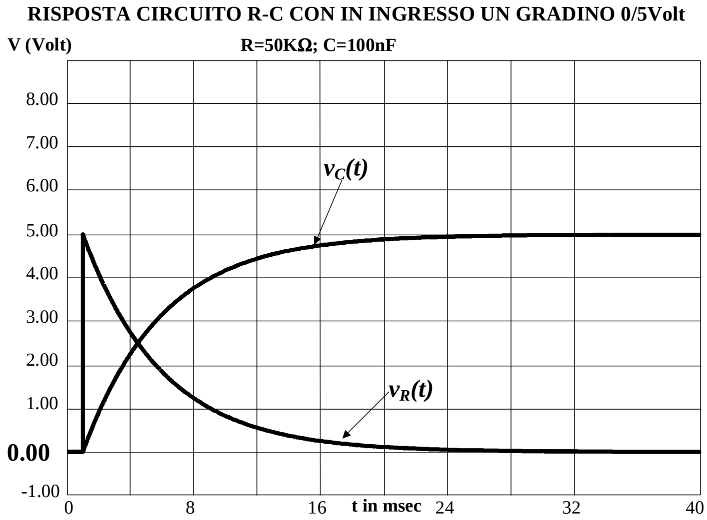

Figura n. 21

L'andamento del tempo delle funzioni (7.1.2) e (7.1.3) è riportato nella **Figura n. 21**, ricavata simulando con μCAP3 un circuito con R=50KΩ e C=100nF al quale è stato posto in ingresso un gradino 0/5Volt che commuta a t=1msec.
Le equazioni (7.1.2) e (7.1.3) ci dicono che le tensioni sul condensatore e sulla resistenza impiegano un tempo infinito a raggiungere i valori finali, che nel caso in esame sono 5V per $v_C(t)$ e 0V per $v_R(t)$. In pratica però dalle stesse equazioni si ricava che dopo che è trascorso un tempo pari a **4τ** tali tensioni sono arrivate al **98.17%** del loro valore finale, dopo **5τ** sono arrivate al **99.33%,** dopo **6τ** sono arrivate al **99.75%.**
Tali risultati possono essere approssimativamente verificati anche dai grafici della simulazione, ricordando che in questo caso **τ** vale 50KΩ*100nF= **5msec**.
È per queste ragioni che:

il condensatore si considera solitamente completamente carico dopo che sia trascorso un intervallo di tempo pari a 5-6 volte τ dall'istante della commutazione.

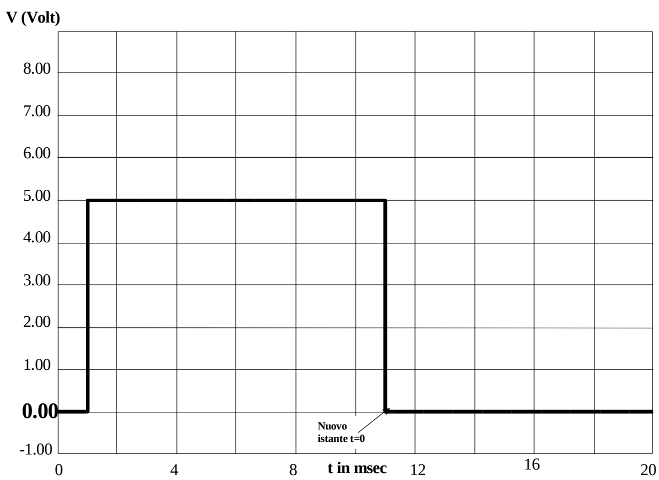

Figura n. 22

Supponiamo ora che, trascorso un tempo pari a T_0 dall'istante della prima commutazione, il gradino torni al valore zero.
Nel caso riportato nella **Figura n. 22** il gradino torna a zero dopo 10msec dalla prima commutazione, cioè dopo che è passato un tempo pari a **2τ** dall'istante nel quale era avvenuta la prima commutazione.
Per trovare le nuove equazioni dell'andamento di $v_C(t)$ e $v_R(t)$ dobbiamo per prima cosa trovare i valori che avevano raggiunto tali tensioni nell'istante immediatamente precedente la nuova commutazione. Utilizzando le equazioni (7.2) e (7.3) si trova:

$$\mathbf{v_C(t = T_0) = V_0 - V_0 e^{-(T_0/\tau)} = V_0\left[1 - e^{-(T_0/\tau)}\right]}$$

Nel caso particolare che stiamo considerando abbiamo $\mathbf{V_0}$**=5V**, $\mathbf{T_0}$**=10msec**, **τ=5msec**, quindi:

$$\mathbf{v_C}(10\mathbf{m}\sec) = \mathbf{5}\left[1 - \mathbf{e}^{-(10\mathbf{m}\sec/5\mathbf{m}\sec)}\right] = 4.32\mathbf{V}$$

La tensione sulla resistenza allo stesso istante la possiamo trovare per differenza (ricordiamo che in ogni istante la somma della tensione sulla resistenza e di quella sul condensatore deve essere uguale alla tensione posta in ingresso, 5V nel nostro caso). Si ricava: **v_R(10msec)=0.68V**.
Allo stesso risultato si giunge partendo dall'equazione (7.1.3):

$$\mathbf{v_R}(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_0\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}/\tau)} \Rightarrow \mathbf{v_R}(\mathbf{t} = 10\mathbf{m}\sec) = \mathbf{5e}^{-(10\mathbf{m}\sec/5\mathbf{m}\sec)} = 0.68\mathbf{V}$$

Per semplificare la forma delle equazioni che dobbiamo andare a trovare, riposizioniamo l'origine dell'asse dei tempi nell'istante della nuova commutazione.

Chiamiamo in generale V_{C0} e V_{R0} i valori raggiunti dalle tensioni sul condensatore e sulla resistenza all'istante **0^-** della nuova commutazione.

I valori delle tensioni nel **nuovo** istante **0^+** si trovano ricordando che istantaneamente il condensatore si comporta come un generatore ideale di tensione, giacché è ora inizialmente carico, mentre nel lungo periodo tende a comportarsi come un circuito aperto. Abbiamo:

$\mathbf{v_{in}}(\mathbf{t} = 0^-) = \mathbf{V}_0$	$\mathbf{v_{in}}(\mathbf{t} = 0^+) = 0$	$\mathbf{v_{in}}(\mathbf{t} \to \infty) = 0$
$\mathbf{v_C}(\mathbf{t} = 0^-) = \mathbf{V_{C0}}$	$\mathbf{v_C}(\mathbf{t} = 0^+) = \mathbf{V_{C0}}$	$\mathbf{v_C}(\mathbf{t} \to \infty) = 0$
$\mathbf{v_R}(\mathbf{t} = 0^-) = \mathbf{V_0} - \mathbf{V_{C0}}$	$\mathbf{v_R}(\mathbf{t} = 0^+) = \mathbf{0 - V_{C0}} = -\mathbf{V_{C0}}$	$\mathbf{v_R}(\mathbf{t} \to \infty) = 0$

Da tali relazioni si ricavano le nuove costanti A e B.

$$\mathbf{v_C}'(\mathbf{t} = 0^+) = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \ \mathbf{e}^{-(0/\tau)} = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' = \mathbf{V_{C0}}$$

$$\mathbf{v_C}'(\mathbf{t} \to \infty) = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \ \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}\to\infty/\tau)} = \mathbf{A}' = 0$$

Dal sistema tra le due ultime equazioni si ricava:

$$\mathbf{A}' = 0 \qquad\qquad \mathbf{B}' = \mathbf{V_{C0}}$$

Quindi, sostituendo i valori trovati di À e B' nella (7.1), si ha che, nel caso in esame, l'equazione dell'andamento della v_C in funzione del tempo è il seguente:

$$\boxed{\mathbf{v_C}'(\mathbf{t}) = \mathbf{V_{C0}}\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}/\tau)}} \qquad \mathbf{(7.1.4)}$$

In modo del tutto analogo si trova l'andamento della tensione sulla resistenza.

$$\mathbf{v_R}'(\mathbf{t} = 0^+) = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \ \mathbf{e}^{-(0/\tau)} = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' = \mathbf{-V_{C0}}$$

$$\mathbf{v_R}'(\mathbf{t} \to \infty) = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \ \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}\to\infty/\tau)} = \mathbf{A}' = 0$$

Dal sistema tra le due ultime equazioni si ricava:

$$\mathbf{A}' = 0 \qquad\qquad \mathbf{B}' = -\mathbf{V_{C0}}$$

Quindi, sostituendo i valori trovati di A' e B' nella (7.1), si ha che, nel caso in esame, l'equazione dell'andamento della v_C in funzione del tempo è il seguente:

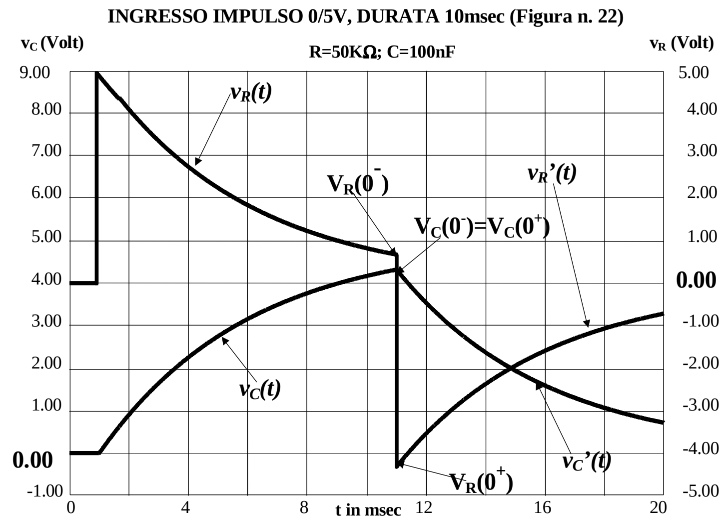

Figura n. 23

$$\boxed{v_R{}'(t) = -V_{C0}e^{-(t/\tau)}} \quad \textbf{(7.1.5)}$$

Quest'ultima relazione si poteva trovare anche per differenza.
La **Figura n. 23** riporta l'andamento delle tensioni sul Condensatore e sulla Resistenza ricavate simulando con µCAP3 il circuito con R=50KΩ e C=100nF al quale è stato posto in ingresso l'impulso di tensione riportato in **Figura n. 22**.

ESERCIZIO: Sia dato un circuito R-C, con R=10KΩ e C=10nF. In ingresso a tale circuito è posta la forma d'onda riportata in Figura n. 24. Trovare le equazioni e disegnare i grafici su carta millimetrata dell'andamento di $v_C(t)$ e di $v_R(t)$. Si consideri il condensatore inizialmente scarico.

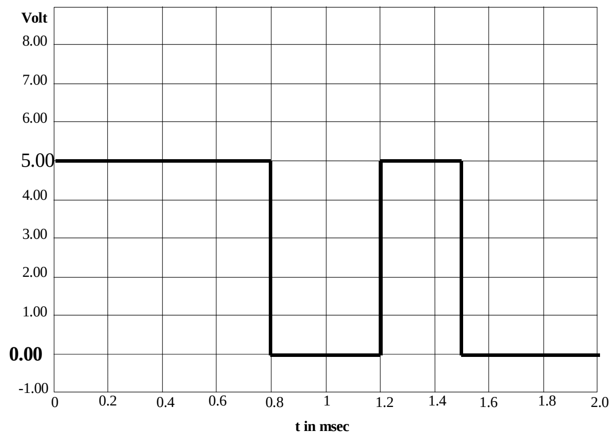

Figura n. 24

ESERCIZIO N.3: All'ingresso di un circuito R-C, con R=1KΩ e C=4.7nF, è posta la forma d'onda riportata in Figura n. 25. Trovare le equazioni e disegnare i grafici su carta millimetrata dell'andamento di $v_C(t)$ e di $v_R(t)$, considerando il Condensatore inizialmente scarico. Si calcoli inoltre la tensione sul condensatore per t=20µsec e quella sulla resistenza per t=8µsec.

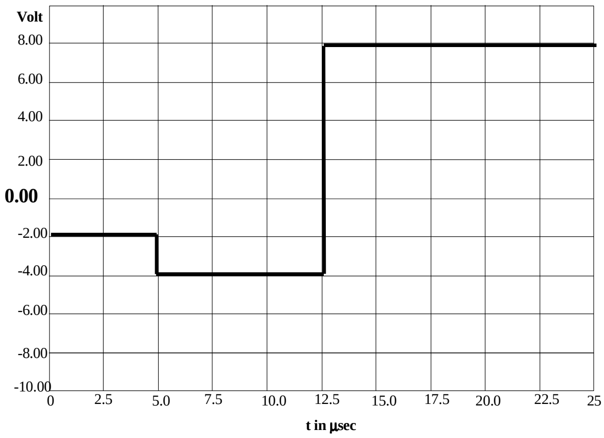

Figura n. 25

7.2 Risposta di un circuito R-C ad un'onda quadra simmetrica a valor medio nullo

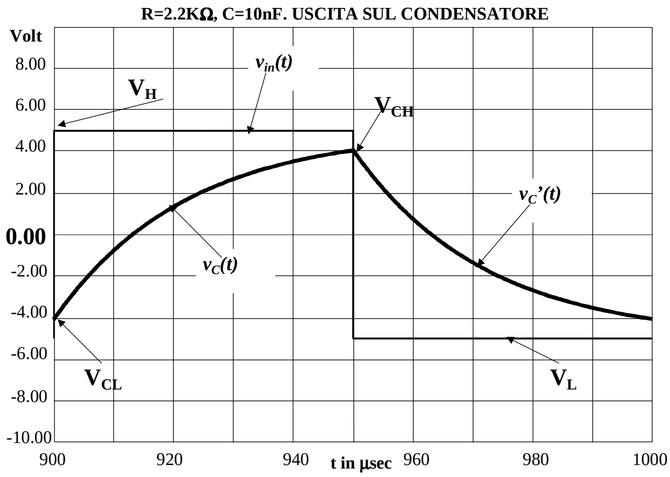

Figura n. 26

In **Figura n. 26** è riportata l'uscita sul condensatore di un circuito R-C alimentato con un'onda quadra simmetrica a valor medio nullo **(V_H=-V_L e D.C=50%).**

Vogliamo trovare l'equazione di tale forma d'onda.

Partiamo dalla relazione generale:

$$\mathbf{v_{C(R)}(t) = A + B\ e^{-(t/\tau)}}$$

Partendo dalla **figura** a fianco, consideriamo la **prima commutazione**, nella quale la tensione d'ingresso passa dal valore basso (V_L) a quello alto (V_H).

Abbiamo chiamato V_{CL} la tensione sul condensatore nell'istante di questa prima commutazione del segnale d'ingresso.

Ricaviamo le costanti A e B dalle condizioni iniziali e finali.

Nella **prima commutazione**, le condizioni iniziali e finali sono le seguenti:

$\mathbf{v_{in}(t = 0^-) = V_L}$	$\mathbf{v_{in}(t = 0^+) = V_H}$	$\mathbf{v_{in}(t \to \infty) = V_H}$
$\mathbf{v_C(t = 0^-) = V_{CL}}$	$\mathbf{v_C(t = 0^+) = V_{CL}}$	$\mathbf{v_C(t \to \infty) = V_H}$
$\mathbf{v_R(t = 0^-) = V_L - V_{CL}}$	$\mathbf{v_R(t = 0^+) = V_H - V_{CL}}$	$\mathbf{v_R(t \to \infty) = 0}$

Volendo trovare l'equazione dell'andamento di $v_C(t)$, basterà trovare i valori delle costanti A e B, imponendo i valori iniziali e finali:

$$\mathbf{v_C(t = 0^+) = A + B = V_{CL}}$$

$$\mathbf{v_C(t \to \infty) = A = V_H}$$

dal sistema tra le due ultime equazioni si ricava:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V_H} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_H}$$

Quindi, sostituendo i valori trovati di A e B , si ha che, nel caso in esame, l'equazione dell'andamento della $v_C(t)$ è:

$$\mathbf{v_C}(\mathbf{t}) = \mathbf{V_H} + (\mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_H})\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}/\tau)} \qquad \textbf{(7.2.1)}$$

Per trovare V_{CL} basta imporre che $v_C(t)$, per t=T/2, sia uguale a V_{CH}, che nel nostro caso deve essere uguale a $-V_{CL}$.

Si ha:

$$\mathbf{v_C}(\mathbf{T}/2) = \mathbf{V_H} + (\mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_H})\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/2\tau)} = -\mathbf{V_{CL}}$$

Da cui si ricava:

$$\boxed{\mathbf{V_{CL}} = \mathbf{V_H}\frac{\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/2\tau)} - 1}{\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/2\tau)} + 1}} \qquad \textbf{(7.2.2)}$$

e

$$\boxed{\mathbf{V_{CH}} = -\mathbf{V_{CL}} = -\mathbf{V_H}\frac{\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/2\tau)} - 1}{\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/2\tau)} + 1}} \qquad \textbf{(7.2.3)}$$

Per differenza si ricava $v_R(t)$:

$$\mathbf{v_R}(\mathbf{t}) = \mathbf{V_H} - \mathbf{v_C}(\mathbf{t}) = \mathbf{V_H} - \mathbf{V_H} - (\mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_H})\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}/\tau)} = (\mathbf{V_H} - \mathbf{V_{CL}})\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}/\tau)} \qquad \textbf{(7.2.4)}$$

L'andamento della tensione sulla resistenza è riportato in **Figura N. 27**.

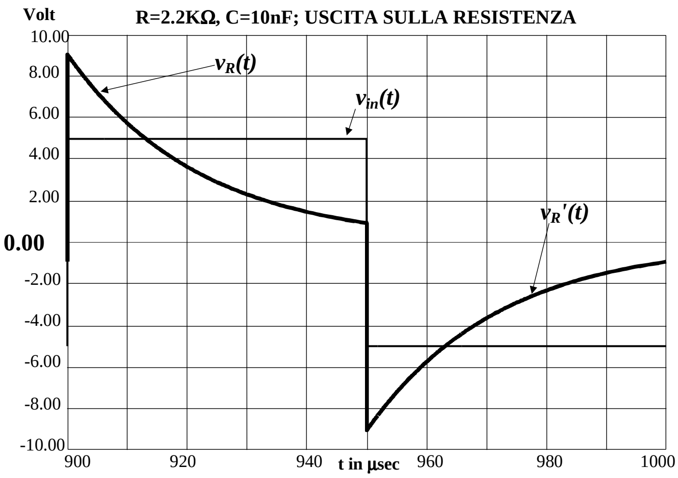

Figura n. 27

Nel **secondo semiperiodo**, le condizioni iniziali e finali sono le seguenti:

$\mathbf{v_{in}}(\mathbf{t} = 0^-) = \mathbf{V_H}$	$\mathbf{v_{in}}(\mathbf{t} = 0^+) = \mathbf{V_L}$	$\mathbf{v_{in}}(\mathbf{t} \to \infty) = \mathbf{V_L}$
$\mathbf{v_C}(\mathbf{t} = 0^-) = \mathbf{V_{CH}}$	$\mathbf{v_C}(\mathbf{t} = 0^+) = \mathbf{V_{CH}}$	$\mathbf{v_C}(\mathbf{t} \to \infty) = \mathbf{V_L}$
$\mathbf{v_R}(\mathbf{t} = 0^-) = \mathbf{V_H} - \mathbf{V_{CH}}$	$\mathbf{v_R}(\mathbf{t} = 0^+) = \mathbf{V_L} - \mathbf{V_{CH}}$	$\mathbf{v_R}(\mathbf{t} \to \infty) = 0$

cioè sono le stesse del primo semiperiodo, solo scambiando L con H e viceversa.
Quindi si possono direttamente scrivere le equazioni:

$$\boxed{\mathbf{v_C}'(\mathbf{t}) = \mathbf{V_L} + (\mathbf{V_{CH}} - \mathbf{V_L})\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}/\tau)}} \qquad \textbf{(7.2.5)}$$

$$\boxed{v_R'(t) = (V_L - V_{CH})e^{-(t/\tau)}} \quad \textbf{(7.2.6)}$$

*ESEMPIO: Applichiamo le relazioni trovate all'onda quadra riportato nelle **Figure nn. 26 e 27**, cioè ad un segnale 5V,-5V di frequenza 10KHz e D.C. 50% applicato ad un circuito R-C con R=2.2KΩ e C=10nF.*

*Dalla formula (7.2.2) si ricava **V_{CL}=-4.07V=-V_{CH}**.*

*Da questi valori si ricava anche che **nel primo semiperiodo la tensione sulla resistenza** parte dal valore **9.07V** (5V+4.07V) ed arriva al valore **0.93V** (5V-4.07V).*

*Nel **secondo semiperiodo** la **tensione sulla resistenza** parte dal valore **-9.07V** (-5V-4.07V) ed arriva al valore **-0.93V** (-5V+4.07V).*

ESERCIZI: Progettare i circuiti R-C in grado di fornire, se alimentati in ingresso con le forme d'onda $v_{in}(t)$, le forme d'onda $v_{out}(t)$ sotto riportate nelle Figure nn. . 28 e 29.

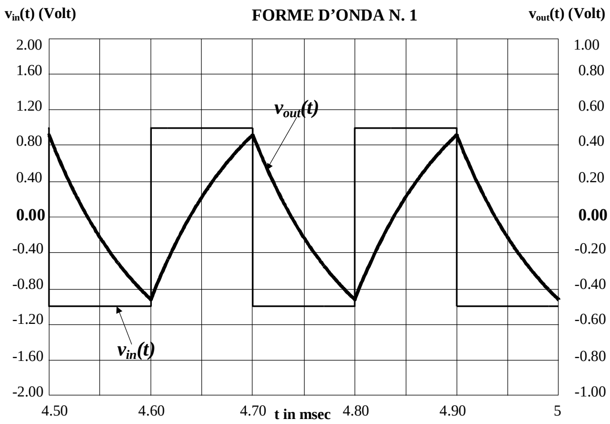

Figura n. 28

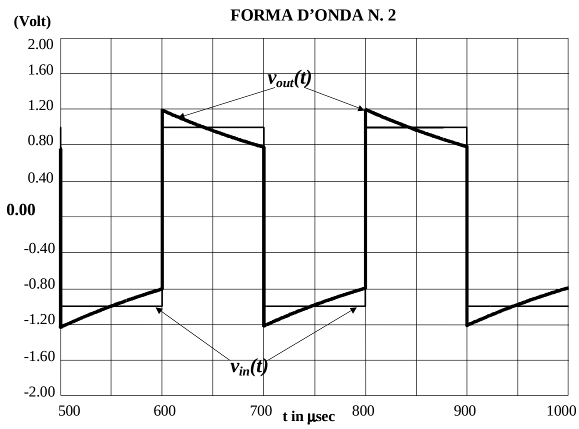

Figura n. 29

7.3 Risposta di un circuito R-C ad un'onda quadra a valor medio non nullo

Nella **Figura n. 30** è riportata l'uscita sul condensatore di un circuito R-C, al quale è stata posta in ingresso un'onda quadra a valor medio non nullo.

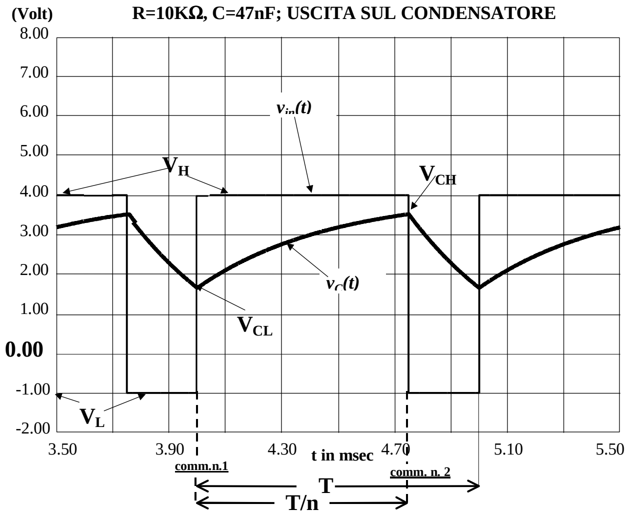

Figura n. 30

Vogliamo trovare l'equazione di tale forma d'onda.

Partiamo sempre dalla relazione generale:

$$\mathbf{v_{C(R)}(t) = A + B\ e^{-(t/\tau)}}$$

Ricaviamo i termini A e B dalle condizioni iniziali (valore delle tensioni all'istante 0^+ della commutazione) e finali (valore delle tensioni per $t \to \infty$)

Nella **commutazione n. 1**, si ha:

$v_{in}(t = 0^-) = V_L$	$v_{in}(t = 0^+) = V_H$	$v_{in}(t \to \infty) = V_H$
$v_C(t = 0^-) = V_{CL}$	$v_C(t = 0^+) = V_{CL}$	$v_C(t \to \infty) = V_H$
$v_R(t = 0^-) = V_L - V_{CL}$	$v_R(t = 0^+) = V_H - V_{CL}$	$v_R(t \to \infty) = 0$

Volendo trovare l'equazione dell'andamento di $v_C(t)$, basterà trovare i valori delle costanti A e B, imponendo i valori iniziali e finali:

$$v_C(t = 0^+) = A + B = V_{CL}$$

$$v_C(t \to \infty) = A = V_H$$

dal sistema tra le due ultime equazioni si ricava:

$$A = V_H \qquad\qquad B = V_{CL} - V_H$$

Quindi, sostituendo i valori trovati di A e B , si ha che, nel caso in esame, l'equazione dell'andamento della $v_C(t)$ in funzione del tempo è il seguente:

$$\boxed{v_C(t) = V_H + (V_{CL} - V_H)e^{-(t/\tau)}} \qquad \textbf{(7.3.1)}$$

Calcoliamo $v_C(t)$, per t=T/n, cioè il valore della tensione sul condensatore nell'istante della seconda commutazione:

$$v_C(T/n) = V_H + (V_{CL} - V_H)e^{-(T/n\tau)} = V_{CH} \qquad \textbf{(7.3.2)}$$

Nella **seconda commutazione**, le condizioni iniziali e finali sono le seguenti:

$v_{in}(t = 0^-) = V_H$	$v_{in}(t = 0^+) = V_L$	$v_{in}(t \to \infty) = V_L$
$v_C(t = 0^-) = V_H + (V_{CL} - V_H)e^{-(T/n\tau)}$	$v_C(t = 0^+) = V_H + (V_{CL} - V_H)e^{-(T/n\tau)}$	$v_C(t \to \infty) = V_L$
$v_R(t = 0^-) = V_H - [V_H + (V_{CL} - V_H)e^{-(T/n\tau)}]$	$v_R(t = 0^+) = V_L - [V_H + (V_{CL} - V_H)e^{-(T/n\tau)}]$	$v_R(t \to \infty) = 0$

Volendo trovare l'equazione dell'andamento di $v_C(t)$ nel secondo "semiperiodo", basta trovare i valori delle costanti A e B , imponendo i valori iniziali e finali:

$$\mathbf{v_C}\left(\mathbf{t} = 0^+\right) = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{V_H} + \left(\mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_H}\right)\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)}$$

$$\mathbf{v_C}\left(\mathbf{t} \to \infty\right) = \mathbf{A} = \mathbf{V_L}$$

dal sistema tra le due ultime equazioni si ricava:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V_L} \qquad\qquad \mathbf{B} = \mathbf{V_H} + \left(\mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_H}\right)\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)} - \mathbf{V_L}$$

e quindi, sostituendo i valori trovati di A e B si ha che, nel caso in esame, l'equazione dell'andamento della $v_C(t)$ nel secondo "semiperiodo" è il seguente:

$$\boxed{\mathbf{v_C}'(\mathbf{t}) = \mathbf{V_L} + \left[\left(\mathbf{V_H} - \mathbf{V_L}\right) + \left(\mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_H}\right)\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)}\right]\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}/\tau)}} \qquad \textbf{(7.1.3)}$$

Per trovare l'incognita V_{CL} basta imporre che la $v_C(t)$, per t=[(n-1)/n]*T sia uguale a V_{CL}

$$\mathbf{v_C}'\left(\mathbf{t} = \frac{\mathbf{n}-1}{\mathbf{n}}\mathbf{T}\right) = \mathbf{V_L} + \left[\left(\mathbf{V_H} - \mathbf{V_L}\right) + \left(\mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_H}\right)\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)}\right]\mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]} = \mathbf{V_{CL}}$$

Sviluppando si ha:

$$\mathbf{V_{CL}} = \mathbf{V_L} + \left(\mathbf{V_H} - \mathbf{V_L}\right)\mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]} + \left(\mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_H}\right)\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)}\mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]}$$
$$\mathbf{V_{CL}} = \mathbf{V_L} + \left(\mathbf{V_H} - \mathbf{V_L}\right)\mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]} + \left(\mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_H}\right)\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}$$

quindi:

$$\mathbf{V_{CL}} - \mathbf{V_{CL}}\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)} = \mathbf{V_L} + \left(\mathbf{V_H} - \mathbf{V_L}\right)\mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]} - \mathbf{V_H}\,\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}$$

$$\mathbf{V_{CL}}\left[1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right] = \mathbf{V_L}\left\{1 - \mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]}\right\} + \mathbf{V_H}\left\{\mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]} - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right\}$$

Da cui si ricava:

$$\boxed{\mathbf{V_{CL}} = \frac{\mathbf{V_L}\left\{1 - \mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]}\right\} + \mathbf{V_H}\left\{\mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]} - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right\}}{\left[1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right]}} \qquad \textbf{(7.3.4)}$$

Sostituendo la V_{CL} trovata nella (7.3.1) si ricava l'equazione dell'andamento della tensione ai capi del Condensatore nel primo semiperiodo.
Sostituendola invece nella (7.3.3) si ricava l'equazione dell'andamento della tensione ai capi del Condensatore nel secondo semiperiodo.
La tensione V_{CH} si ricava sostituendo la V_{CL} trovata nella (7.3.2).
Si ha:

$$\mathbf{V_{CH}} = \mathbf{V_H}\left[1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)}\right] + \frac{\mathbf{V_L}\left\{1 - \mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]}\right\} + \mathbf{V_H}\left\{\mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]} - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right\}}{\left[1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right]}\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)} =$$

$$= \frac{\mathbf{V_H}\left[1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)}\right]\left[1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right] + \mathbf{V_L}\left\{1 - \mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]}\right\}\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)} + \mathbf{V_H}\left\{\mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]}\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)} - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)}\right\}}{\left[1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right]} =$$

$$= \frac{\mathbf{V_H}\left\{1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)} - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)} + \mathbf{e}^{-[(1+\mathbf{n})\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]}\right\} + \mathbf{V_L}\left\{\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)} - \mathbf{e}^{-[(\mathbf{n}-1)\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)}\right\} + \mathbf{V_H}\left\{\mathbf{e}^{-[1-(1/\mathbf{n})+(1/\mathbf{n})](\mathbf{T}/\tau)} - \mathbf{e}^{-[(1+\mathbf{n})\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau]}\right\}}{\left[1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right]}$$

da cui si ricava:

$$\boxed{\mathbf{V_{CH}} = \frac{\mathbf{V_H}\left[1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)}\right] + \mathbf{V_L}\left[\mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\mathbf{n}\tau)} - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right]}{\left[1 - \mathbf{e}^{-(\mathbf{T}/\tau)}\right]}} \textbf{(7.3.5)}$$

Una volta trovate le equazioni $v_C(t)$ e $v_C'(t)$ si possono facilmente ricavare per differenza $v_R(t)$ e $v_R'(t)$:

$$\boxed{\mathbf{v_R(t) = V_H - v_C(t) = V_H - V_H - (V_{CL} - V_H)e^{-(t/\tau)} = (V_H - V_{CL})e^{-(t/\tau)}}} \qquad \textbf{(7.3.6)}$$

$$\mathbf{v_R'(t) = V_L - v_C'(t) = V_L - V_L - \left[(V_H - V_L) + (V_{CL} - V_H)e^{-(T/n\tau)}\right]e^{-(t/\tau)}}$$

$$\boxed{\mathbf{v_R'(t) = \left[(V_L - V_H) + (V_H - V_{CL})e^{-(T/n\tau)}\right]e^{-(t/\tau)}}} \qquad \textbf{(7.3.7)}$$

ESERCIZIO: Trovare i valori di R e di C e l'onda quadra da porre in ingresso ad un circuito R-C per ottenere sul Condensatore un segnale triangolare -200mV/100mV, di frequenza 50KHz.

ESERCIZIO: Trovare i valori di R e di C e l'onda quadra da porre in ingresso ad un circuito R-C per ottenere sul condensatore un segnale triangolare -100mV/300mV di frequenza 30KHz.

PONTEDERA addì, lunedì 24 maggio 2010

C:\DOCUMENTI\ITIS MARCONI\APPUNTI\APPUNTI MIEI 1999_2000 E PRECEDENTI\C_L_RC_LAPLACE\CONDENSATORE INDUTTANZA RC TRASFORMATA DI LAPLACE aggiornamento 2006.doc. Dimensione 2757KB, numero di parole 8168, numero di caratteri 43219.
creato lunedì 06 febbraio 2006 - ultimo salvataggio lunedì 24 maggio 2010 ore 18.26 - versione n. 11
Autore Pierluigi D'Amico.